

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. XI, N. 6

Serie nona

1° Giugno 1954

Yang-Feldmanformalismus und einzeitige Wellenfunktionen.

W. ZIMMERMANN

Max-Planck-Institut für Physik - Göttingen

(ricevuto l'8 Marzo 1954)

Summary. — The integral equations of the new Tamm-Dancoff method are derived with the aid of the Yang-Feldman formalism. The inhomogeneous terms of these equations contain the boundary conditions at the time $t = \pm \infty$.

1. — Einleitung.

Zur Behandlung von Wechselwirkungsproblemen in der Feldphysik wurde vor kurzem von DYSON ⁽¹⁾ ein Gleichungssystem einzeitiger Wellenfunktionen (neue Tamm-Dancoffmethode) angegeben, das äußerlich den Gleichungen der (alten) Tamm-Dancoffmethode ähnelt, von diesen sich jedoch wesentlich in der Wahl des Bezugsvakuums unterscheidet. Ein anderes System ⁽²⁻³⁾, das dem Dyson'schen System äquivalent ist, wurde aus dem lorentzinvarianten Differentialgleichungssystem ⁽²⁻⁶⁾ der mehrzeitigen Wellenfunktionen durch Gleichsetzen der Zeiten gewonnen. Beide Systeme haben, als Folge ihrer Beziehung auf das Vakuum der Gesamtenergie ⁽²⁾, gegenüber der (alten) Tamm-Dancoffmethode den großen Vorzug, renormierbar zu sein.

⁽¹⁾ F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **91**, 1543 (1953), im Folgenden mit A zitiert.

⁽²⁾ W. ZIMMERMANN: *Suppl. Nuovo Cimento*, **11**, 106 (1954), im Folgenden mit B zitiert.

⁽³⁾ Für den anharmonischen Oszillator untersucht von W. HEISENBERG: *Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math. Phys. Klasse*, 111 (1953) und K. SYMANZIK: *Dissertation Göttingen* (1954).

⁽⁴⁾ K. NISHIJIMA: *Progr. theor. Phys.*, **10**, 549 (1953).

⁽⁵⁾ E. FREESE: *Zeits. f. Naturf.*, **8a**, 776 (1953).

⁽⁶⁾ P. T. MATTHEWS und A. SALAM: *Proc. Roy. Soc.*, **A 221**, 128 (1954).

Unklar bleibt jedoch in beiden Systemen, wie über verschwindende Energienenner zu integrieren ist, was sich als nötig erweist, wenn beispielsweise in einer bestimmten Näherung des 2-Nukleonenproblems alle Wellenfunktionen außer der $|2\rangle$ -Wellenfunktion eliminiert werden sollen ⁽⁷⁾. Dieser Nachteil ist darauf zurückzuführen, daß die Randbedingungen zur Zeit $t = \pm \infty$ nicht explizit in die Gleichungssysteme eingehen.

In der vorliegenden Arbeit soll deshalb ein drittes äquivalentes System angegeben werden, dessen Ableitung als wesentliches Hilfsmittel den Yang-Feldmanformalismus benutzt und keinen Zweifel darüber läßt, in welcher Weise die Randbedingungen für $t = \pm \infty$ zu berücksichtigen sind. Die dabei erhaltenen analytischen Ausdrücke können sehr leicht durch die Dyson'schen Doppelgraphen ⁽⁸⁾ veranschaulicht werden. Der Formalismus wird nur in der untersten Näherung entwickelt, da eine strenge Fassung der verschiedenen Systeme einzeitiger Wellenfunktionen (in funktionaler Schreibweise) in einer Arbeit von SYMANZIK ⁽⁹⁾ erfolgen wird.

2. - Analytische Behandlung.

Wir leiten zunächst zwei Integralgleichungen ab, welche die einzeitige $|2\rangle$ -Wellenfunktion ⁽¹⁰⁾ und die einzeitige $1|2\rangle$ -Wellenfunktion ⁽¹¹⁾ untereinander verknüpfen, falls die nächsthöheren Wellenfunktionen vernachlässigt werden. Beide Gleichungen werden sodann in eine Integralgleichung für die einzeitige $|2\rangle$ -Wellenfunktion allein umgewandelt.

In der Absicht die einzeitige $|2\rangle$ -Wellenfunktion

$$\varphi_t(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\rangle) = (\Omega, T\psi(x_1)\psi(x_2)\Phi)_{x_i^0=t} = (\Omega, \psi(x_1)\psi(x_2)\Phi)_{x_i^0=t} \quad (12)$$

eines Zustands Φ zweier gebundener oder gestreuter Nukleonen durch die einzeitige $1|2\rangle$ -Wellenfunktion

$$\varphi_t(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) = (\Omega, \psi(x_1)\psi(x_2)A(\mathbf{y})\Phi)_{x_i^0=y^0=t} \quad (12)$$

auszudrücken, multiplizieren wir zunächst beide Seiten der Yang-Feldmanglei-

⁽⁷⁾ Zur Diskussion dieser Schwierigkeit vgl. A, Abschnitt IX.

⁽⁸⁾ F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **82**, 428 (1951).

⁽⁹⁾ K. SYMANZIK: im Erscheinen.

⁽¹⁰⁾ Wellenfunktion mit zwei Nukleonenkoordinaten.

⁽¹¹⁾ Wellenfunktion mit einer Mesonen- und zwei Nukleonenkoordinaten.

⁽¹²⁾ Zur allgemeinen Umrechnung zwischen einzeitigen Wellenfunktionen und Übergangselementen einzeitiger Operatorenprodukte vgl. Formel (7).

chungen

$$(1.a) \quad \psi(x_1) = \psi_{\text{in}}(x_1) + ig \int_{-\infty}^t S(x_1 - x'_1) \gamma_5 A(x'_1) \psi(x'_1) dx'_1 + \delta m \int_{-\infty}^t S(x_1 - x'_1) \psi(x'_1) dx'_1 \quad (13),$$

$$(1.b) \quad \psi(x_2) = \psi_{\text{in}}(x_2) + ig \int_{-\infty}^t S(x_2 - x'_2) \gamma_5 A(x'_2) \psi(x'_2) dx'_2 + \delta m \int_{-\infty}^t S(x_2 - x'_2) \psi(x'_2) dx'_2,$$

gliedweise miteinander. Von der Richtigkeit der dann folgenden Beziehung

$$(2) \quad \begin{aligned} \psi(x_1) \psi(x_2)_{t=t} &= \psi_{\text{in}}(x_1) \psi_{\text{in}}(x_2) + \\ &+ \int_{-\infty}^t dt' \int_{t'}^t d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 S(x_1 - x'_1) S(x_2 - x'_2) \gamma_4^2 \{ g \gamma_5^1 \psi(x'_1) \psi(x'_2) A(x'_1) - i \delta m \psi(x'_1) \psi(x'_2) \} + \\ &+ \int_{-\infty}^t dt' \int_{t'}^t d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 S(x_1 - x'_1) S(x_2 - x'_2) \gamma_4^2 \{ g \gamma_5^2 \psi(x'_1) \psi(x'_2) A(x'_2) - i \delta m \psi(x'_1) \psi(x'_2) \} \end{aligned}$$

überzeugt man sich am besten durch Einsetzen der Yang-Feldmangleichungen für $\psi(x'_2)$ im ersten Integralterm und $\psi(x'_1)$ im zweiten Integralterm. Nach einer einfachen Umformung erhält man das Produkt der rechten Seiten von Gl. (1.a) und (1.b). Von (Gl. 2) bildet man die Matrixelemente $\Omega \rightarrow \Phi$:

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi_t(|\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2|) &= \varphi_t^{-\infty}(|\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2|) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{t'}^t d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 S_R(x_1 - x'_1) S_R(x_2 - x'_2) \gamma_4^2 \cdot \\ &\cdot \{ g \gamma_5^1 \varphi_t(\mathbf{x}'_1 | \mathbf{x}'_1 \mathbf{x}'_2) - i \delta m \varphi_t(|\mathbf{x}'_1 \mathbf{x}'_2|) \} - \text{symm.} \quad (14). \end{aligned}$$

Hierin beschreibt

$$(4) \quad \varphi_t^{-\infty}(|\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2|) = (\Omega, \psi_{\text{in}}(x_1) \psi_{\text{in}}(x_2) \Phi)_{x_t^2=t}$$

(13) $S(z)$ gehört zur experimentellen Masse m . Man kann auch von der Yang-Feldmangleichung

$$\psi(x) = ig \int_{-\infty}^t S_{m_0}(x - x') \gamma_5 A(x') \bar{\psi}(x') dx', \quad m_0 = m + \delta m$$

ausgehen, doch ist die Aufspaltung von m_0 in experimentelle und Zusatzmasse für die Diskussion der Randbedingungen praktischer.

(14) Der mit symm. abgekürzte zum angegebenen Integralausdruck symmetrische Term entsteht durch Vertauschen der Indizes 1 und 2, so ist z.B. $\varphi_t(\mathbf{x}'_1 | \mathbf{x}'_1 \mathbf{x}'_2)$ durch $\varphi_t(\mathbf{x}'_2 | \mathbf{x}'_2 \mathbf{x}'_1)$ zu ersetzen.

die beiden einlaufenden Nukleonen bzw. verschwindet, wenn Φ Grundzustand zweier gebundener Nukleonen ist.

Ganz ähnlich gehen wir vor, um die $1|2|$ -Wellenfunktion $\varphi_i(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)$ zu den nächsthöheren einzeitigen Wellenfunktionen in Beziehung zu setzen. Man drückt zunächst das Operatorenprodukt

$$\psi(x_1)\psi(x_2)A(y)_{x_i^0=y^0=t}$$

durch die einzeitigen Operatorenprodukte

$$\psi(x_1)\psi(x_2)A(y_1)A(y_2), \quad \psi(x_1)\psi(x_2)A(y_1)\dot{A}(y_2), \quad \psi(x_1)\psi(x_2)^{1/2}[\bar{\psi}(y), \psi(y)]$$

aus, indem man die drei Yang-Feldmangleichungen (1.a,b) und

$$(5) \quad A(y) = A_{\text{in}}(y) - \frac{ig}{2} \int_{-\infty}^t \Delta(y-y')[\bar{\psi}(y'), \psi(y')]\gamma_5 dy' \quad (15)$$

miteinander multipliziert. Die gesuchte Operatorbeziehung wird damit:

$$(6) \quad \begin{aligned} \psi(x_1)\psi(x_2)A(y)_{x_i^0=y^0=t} &= \psi_{\text{in}}(x_1)\psi_{\text{in}}(x_2)A_{\text{in}}(y) + \\ &+ i \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 d\mathbf{y}' S(x_1-x'_1)S(x_2-x'_2)\Delta(y-y')\{O_1(\mathbf{x}'_1, \mathbf{y}', t') + O_2(\mathbf{x}'_1, \mathbf{y}', t')\} - \\ &- i \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 d\mathbf{y}' S(x_1-x'_1)S(x_2-x'_2)\Delta(y-y')O_1(\mathbf{x}'_1, \mathbf{y}', t') \\ O_1 &= + ig\gamma_5^1\gamma_4^2\psi(x'_1)\psi(x'_2)A(x'_1)A(y')_{x_i^0=y^0=t'} + ig\gamma_4^1\gamma_5^2\psi(x'_1)\psi(x'_2)A(y')_{x_i^0=y^0=t'} + \\ &+ \delta m(\gamma_4^1 + \gamma_4^2)\psi(x'_1)\psi(x'_2)A(y')_{x_i^0=y^0=t'} \\ O_2 &= \frac{1}{2} g\gamma_4^1\gamma_4^2\psi(x'_1)\psi(x'_2)[\bar{\psi}(y'), \psi(y')]\gamma_5^{\mathbf{y}'}_{x_i^0=y^0=t'} \end{aligned}$$

die dadurch nachzuprüfen ist, daß im ersten Term von O_1 $\psi(x'_2)$ und $A(y')$, im zweiten Term von O_1 $\psi(x'_1)$ und $A(y')$ und in O_2 $\psi(x'_1)$ und $\psi(x'_2)$ durch die rechten Seiten der Yang-Feldmangleichungen ersetzt werden. Von Gl. (6) hat man dann nur noch die Matrixelemente $\Omega \rightarrow \Phi$ zu bilden, und die entstandenen Matrixelemente einzeitiger Operatorenprodukte nach der Wick'schen Regel in

(15) Das Glied mit der Renormierungskonstanten $\delta\kappa^2$ ist weggelassen, da sich diese in der behandelten Näherung ohnehin zu Null ergibt.

einzeitige Wellenfunktionen zu verwandeln, z.B.:

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & (\Omega, \psi(x_1)\psi(x_2)A(y_1)A(y_2)\Phi)_{x_i^0=y_j^0=t} = \\
 & = \lim_{x_i^0, y_j^0 \rightarrow t} (\Omega, T\psi(x_1)\psi(x_2)A(y_1)A(y_2)\Phi)_{x_1^0 > x_2^0 > y_1^0 > y_2^0} = \\
 & = \varphi_t(\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2 | \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) + i\Delta^+(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)\varphi_t(|\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2|).
 \end{aligned}$$

Bei Vernachlässigung aller Wellenfunktionen außer der $|2|$ -Wellenfunktion auf der rechten Seite folgt so die Gleichung

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \varphi_t(\mathbf{y} | \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) = \varphi_t^{-\infty}(\mathbf{y} | \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) + ig \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{t'}^{\infty} d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 L_R(y - x'_1; x_1 - x'_1) \cdot \\
 & \quad \cdot \gamma_5^1 S_R(x_2 - x'_2) \gamma_4^2 \varphi_{t'}(|\mathbf{x}'_1 \mathbf{x}'_2|) + \\
 & \quad + ig \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{t'}^{\infty} d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 L_R(y - x'_2; x_2 - x'_2) \gamma_5^2 S_R(x_1 - x'_1) \gamma_4^1 \varphi_{t'}(|\mathbf{x}'_1 \mathbf{x}'_2|) \\
 & [L_R(z_1; z_2) = A^+(-z_1)S_R(z_2) + \Delta_R(z_1)S^+(z_2)]
 \end{aligned}$$

welche zusammen mit Gl. (3) für $\varphi_t(|\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2|)$ die Integralgleichung

$$\begin{aligned}
 \varphi_t(|\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2|) &= \varphi_t^{-\infty}(|\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2|) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{t'}^{\infty} d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 K_1(x_1 - x'_1) S_R(x_2 - x'_2) \gamma_4^2 \varphi_{t'}(|\mathbf{x}'_1 \mathbf{x}'_2|) + \\
 & \quad + \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{t'}^{\infty} d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 K_{12}(x_1 x_2; x'_1 x'_2) \varphi_{t'}(|\mathbf{x}'_1 \mathbf{x}'_2|) - \text{symm.} \\
 (9) \quad & \begin{cases} K_1(x_1 - x'_1) = -i\delta m S_R(x_1 - x'_1) + g^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dq S_R(x_1 - q) \gamma_5^1 L_R(q - x'_1; q - x'_1) \gamma_5^1 \\ K_{12}(x_1 x_2; x'_1 x'_2) = g^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dq S_R(x_1 - q) \gamma_5^1 L_R(q - x'_2; x_2 - x'_2) \gamma_5^2 S_R(q - x'_1) \gamma_4^1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

ergibt, wenn $\varphi_t^{-\infty}(\mathbf{y} | \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) = 0$ gesetzt wird ⁽¹⁶⁾.

⁽¹⁶⁾ Zur Diskussion der Randbedingungen für $t = -\infty$ vgl. den letzten Abschnitt.

3. – Graphische Behandlung.

Die Rechnungen des letzten Abschnitts lassen sich wesentlich schneller mit Hilfe der Dyson'schen Doppelgraphen ⁽¹⁷⁻¹⁸⁾ durchführen. Im Gegensatz zu den gewöhnlichen Feynmangraphen enthalten Doppelgraphen für jede Teilchensorte zwei Arten von Linien: Einfachlinien, denen S^+ , Δ^+ -Funktionen entsprechen, und Doppellinien, denen retardierte Funktionen entsprechen. Die in der vorliegenden Arbeit zur Übersetzung von Doppelgraphen in analytische Ausdrücke gültigen Regeln sind folgende: Einer inneren Nukleonendoppellinie (stark ausgezogen) und einer inneren Mesonendoppellinie (stark gestrichelt) entsprechen bzw. die Faktoren $iS_R(x-x')$, $-i\Delta_R(x-x')$, wenn die Linien von x' nach x gerichtet sind. Einer inneren Nukleoneneinfachlinie (schwach ausgezogen) und einer inneren Mesoneneinfachlinie (schwach gestrichelt) entsprechen bzw. die Faktoren $-iS^+(x-x')$, $i\Delta^+(x-x')$, wenn die Linien von x' nach x gerichtet sind. Ist eine von x nach x' weisende Mesonenlinie bei x oder x' durch einen Punkt markiert, so ist für sie $-i\Delta_R(x-x')$ oder $-i\Delta_R(x-x')$ bzw. $i\Delta^+(x-x')$ oder $i\Delta^+(x-x')$ einzusetzen. Die Einsetzungsregeln für $1|1|1$ -Eckpunkte, $|1|1$ -Eckpunkte (durch δm in der Zeichnung von den Nukleonenunterteilungsstellen unterschieden) und Nukleonen- oder Mesonenunterteilungsstellen sind dieselben wie bei Feynmangraphen: Einem $1|1|1$ -Eckpunkt entspricht der Faktor $-g\gamma_5$, einem $1|1|$ -Eckpunkt der Faktor $i\delta m$, einer Nukleonenunterteilungsstelle der Faktor γ_4 , einer Mesonenunterteilungsstelle der Faktor $+1$ oder -1 , je nachdem, ob die Stelle oberhalb oder unterhalb durch einen Punkt markiert ist. Die den äußeren Linien entsprechenden Operatoren oder Wellenfunktionen gehen aus der Beschriftung der Zeichnungen hervor. Sollen mehrere Punkte die gleiche Zeitkoordinate erhalten, so sind sie in gleicher Höhe gezeichnet. Sollen aber die Zeitintegrationen in anderer Weise beschränkt werden, z.B. daß die Zeitkoordinate des Eckpunkts x'_1 stets früher sein soll als die Zeitkoordinate des Eckpunkts x'_2 , so wird das in der Form $x_1^0 < x_2^0$ ausdrücklich angegeben.

Fig. 1 zeigt die Yang-Feldmangleichungen (1a), (1b) und (5). In Fig. 2a, wird durch Multiplikation von Fig. 1a mit Fig. 1b die graphische Form der Gl. (2) abgeleitet. Übergang zu den Wellenfunktionen ergibt Fig. 2b [Gl. (3)]. Fig. 3a stellt die einzeitige Operatorgleichung (6) dar ⁽¹⁹⁾, aus der bei Vernachlässigung der höheren Wellenfunktionen Fig. 3b [Gl. (8)] folgt. Durch Einsetzen von Fig. 3b in 2a ergibt sich die Integralgleichung Fig. 4 [Gl. (9)] der einzeitigen $|2|$ -Wellenfunktion.

⁽¹⁷⁾ F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **82**, 428 (1951).

⁽¹⁸⁾ Über die graphische Behandlung von Integralgleichungen der Feldphysik vgl. B, Anhang.

⁽¹⁹⁾ Die δm -Glieder sind in Fig. 3a der Einfachheit halber weggelassen.

Figure 1 consists of three rows of diagrams, labeled (a), (b), and (c), each showing an equality between a propagator and a sum of three terms.

- Row (a):** The first diagram is a vertical line with an incoming arrow labeled X_1 at the top and an outgoing arrow labeled Y at the bottom. This is equal to the sum of:
 - A vertical line with an incoming arrow labeled X_1 at the top and an outgoing arrow labeled Y_{in} at the bottom.
 - A diagram with an incoming arrow labeled X_1 at the top, which splits into two outgoing arrows labeled Y and A .
 - A vertical line with an incoming arrow labeled X_1 at the top and an outgoing arrow labeled Y at the bottom, with a small circle labeled δm on the line.
- Row (b):** The first diagram is a vertical line with an incoming arrow labeled X_2 at the top and an outgoing arrow labeled Y at the bottom. This is equal to the sum of:
 - A vertical line with an incoming arrow labeled X_2 at the top and an outgoing arrow labeled Y_{in} at the bottom.
 - A diagram with an incoming arrow labeled X_2 at the top, which splits into two outgoing arrows labeled Y and A .
 - A vertical line with an incoming arrow labeled X_2 at the top and an outgoing arrow labeled Y at the bottom, with a small circle labeled δm on the line.
- Row (c):** The first diagram is a vertical dashed line with an incoming arrow labeled Y at the top and an outgoing arrow labeled A at the bottom. This is equal to the sum of:
 - A vertical dashed line with an incoming arrow labeled Y at the top and an outgoing arrow labeled A_{in} at the bottom.
 - A diagram with an incoming arrow labeled Y at the top, which splits into two outgoing arrows labeled A and Y . The arrow labeled A has a small circle labeled $\frac{1}{2}(\bar{\psi}\psi)$ next to it.
 - A vertical dashed line with an incoming arrow labeled Y at the top and an outgoing arrow labeled Y at the bottom, with a small circle labeled δm on the line.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{array}{c} \downarrow X_1 \\ \downarrow X_2 \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow X_1 \\ \downarrow X_2 \end{array} + \left(\begin{array}{c} \downarrow X_1 \\ \swarrow A \\ \downarrow \end{array} + \begin{array}{c} \downarrow X_1 \\ \downarrow \delta m \end{array} \right) \begin{array}{c} \downarrow X_2 \\ \downarrow \end{array} - \text{SYMM.} + \\
 & + \left(\begin{array}{c} \downarrow X_1 \\ \swarrow X'_1 \\ \downarrow A \end{array} + \begin{array}{c} \downarrow X_1 \\ \downarrow \delta m \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \downarrow X_2 \\ \swarrow X'_2 \\ \downarrow A \end{array} + \begin{array}{c} \downarrow X_2 \\ \downarrow \delta m \end{array} \right) - \text{SYMM.} \\
 & \text{b)} \quad \underbrace{\begin{array}{c} \downarrow X_1 \\ \downarrow X_2 \end{array}}_{\Phi} = \underbrace{\begin{array}{c} \downarrow X_1 \\ \downarrow X_2 \end{array}}_{\Phi_{-\infty}} + \underbrace{\begin{array}{c} \downarrow X_1 \\ \swarrow A \\ \downarrow \end{array}}_{\Phi} + \delta m \underbrace{\begin{array}{c} \downarrow X_1 \\ \downarrow X_2 \end{array}}_{\Phi} - \text{SYMM.}
 \end{aligned}$$

(a)

Diagram (a) illustrates the expansion of a propagator with two external lines and a dashed line. The expansion is a sum of terms with increasing numbers of internal lines. The first term is a simple propagator. The second term is a sum of two diagrams with one internal line. The third term is a sum of three diagrams with two internal lines. The fourth term is a sum of four diagrams with three internal lines. The expansion is labeled with δm and "Glieder".

(b)

Diagram (b) illustrates the expansion of a propagator with two external lines and a dashed line. The expansion is a sum of terms with increasing numbers of internal lines. The first term is a simple propagator. The second term is a sum of two diagrams with one internal line. The third term is a sum of three diagrams with two internal lines. The fourth term is a sum of four diagrams with three internal lines. The expansion is labeled with δm and "Glieder".

$$\begin{matrix} \uparrow X_1 & \uparrow X_2 & = & \uparrow X_1 & \uparrow X_2 & + & \uparrow X_1 & \uparrow X_2 & + & \uparrow X_1 & \uparrow X_2 & + & \delta_m & \uparrow X_1 & \uparrow X_2 & + & \text{dashed arrow} & \uparrow X_1 & \uparrow X_2 \\ \underbrace{\hspace{1cm}}_{\mathcal{G}} & & & \underbrace{\hspace{1cm}}_{\mathcal{G}_{-\infty}^0} & & & \underbrace{\hspace{1cm}}_{\mathcal{G}} & & & \underbrace{\hspace{1cm}}_{\mathcal{G}} & & & \underbrace{\hspace{1cm}}_{\mathcal{G}} & & & \underbrace{\hspace{1cm}}_{\mathcal{G}} & & & \underbrace{\hspace{1cm}}_{\mathcal{G}} \end{matrix}$$

Ganz analog verfährt man, wenn man allgemein, für eine einzeitige Wellenfunktion beliebig vieler Koordinaten, die zugehörige Integralgleichung angeben will. Die durch Elimination der höheren Wellenfunktionen aus dem unendlichen Gleichungssystem erhaltene Integralgleichung für $\varphi_t(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|)$ allein hat die Form

$$(10) \quad \varphi_t(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = \varphi_t^{-\infty}(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) + \sum_D K_D^{\varphi_{t'}(|\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2|)}(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|)_{x'_1=x'_2=t} \quad (20)$$

worin auf der rechten Seite über alle einzeitig irreduziblen $|2|$ -Doppelgraphen D summiert wird und K_D den D zugeordneten analytischen Ausdruck bedeutet. Einen Doppelgraphen D nennen wir dabei $|2|$ -Doppelgraph, wenn er zwei äußere einlaufende Nukleonenlinien ⁽²¹⁾ und zwei in den Punkten x_1 und x_2 blind endende innere Nukleonenlinien besitzt. Er heißt ferner einzeitig irreduzibel, wenn er nicht durch einen Schnitt konstanter Zeit in zwei $|2|$ -Doppelgraphen zerlegt werden kann. Gl. (9) und Fig. 4 sind gerade die g^2 -Näherung der strengen Gleichung (10).

4. – Vergleich mit äquivalenten Methoden.

Wir stellen zunächst den Zusammenhang mit den in A angegebenen Beziehungen her. Dazu transformieren wir die Gl. (3) und (8) mit Hilfe der Formeln ⁽²²⁾

$$[E_p = \sqrt{p^2 + m^2}, \quad w_k = \sqrt{k^2 + \kappa^2}, \quad \eta(p) = E_p^{-1}(\alpha p + \beta m)]$$

$$S(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \exp[i(\mathbf{p}\mathbf{x} - \eta(\mathbf{p})E_p t)] \gamma_4,$$

$$\begin{aligned} L(x_1; x_2) &= \Delta^+(-x_1)S(x_2) + \Delta(x_1)S^+(x_2) = \Delta^+(x_1)S^+(x_2) - \Delta^-(x_1)S^-(x_2) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{p} d\mathbf{k} \frac{1}{2\omega_k} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x}_1 + \mathbf{p}\mathbf{x}_2)] \exp[-i\eta(\mathbf{p})(\omega_k t_1 + E_p t_2)] \gamma_4, \end{aligned}$$

$$\varphi_t(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = \frac{1}{(2\pi)^6} \exp[-iEt] \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \varphi(|\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|) \exp[i(\mathbf{p}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{x}_2)],$$

$$\varphi_t(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) = \frac{1}{(2\pi)^9} \exp[-iEt] \int d\mathbf{k} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \varphi(\mathbf{k}|\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{y} + \mathbf{p}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{x}_2)],$$

⁽²⁰⁾ Ausgenommen $\varphi_t^{-\infty}(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|)$ sind alle Funktionen $\varphi_t^{-\infty}$ gleich Null gesetzt worden, siehe den letzten Abschnitt.

⁽²¹⁾ Für die beiden äußeren Nukleonenlinien ist in Gl. (10) die Wellenfunktion $\varphi_{t'}(|\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2|)$ selbst einzusetzen.

⁽²²⁾ Wir machen die Annahme, daß Φ Energieeigenvektor ist.

in den Impulsraum:

$$(11) \quad \varphi(|\mathbf{p}\mathbf{q}|) = \varphi^{-\infty}(|\mathbf{p}\mathbf{q}|) - \frac{ig}{(2\pi)^2} \delta_+(E - \eta_1(\mathbf{p})E_p - \eta_2(\mathbf{q})E_q) \cdot \\ \cdot \int d\mathbf{k} \{ \gamma^1 \varphi(\mathbf{k}|\mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{q}) + \gamma^2 \varphi(\mathbf{k}|\mathbf{p}, \mathbf{q} - \mathbf{k}) \} - \\ - 2\pi i \delta m \delta_+(E - \eta_1(\mathbf{p})E_p - \eta_2(\mathbf{q})E_q) (\gamma_4^1 + \gamma_4^2) \varphi(|\mathbf{p}\mathbf{q}|) \quad [\gamma^s = i\gamma_4^s \gamma_5^s],$$

$$(12) \quad \varphi(\mathbf{k}|\mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{q}) = \varphi^{-\infty}(\mathbf{k}|\mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{q}) - \\ - \frac{\pi ig}{\omega_k} \delta_+(E - \eta_1(\mathbf{p} - \mathbf{k})(E_{p-k} + \omega_k) - \eta_2(\mathbf{q})E_q) \gamma^1 \varphi(|\mathbf{p}\mathbf{q}|) - \\ - \frac{\pi ig}{\omega_k} \delta_+(E - \eta_1(\mathbf{p} - \mathbf{k})E_{p-k} - \eta_2(\mathbf{q})(E_q + \omega_k)) \gamma^2 \varphi(|\mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{q} + \mathbf{k}|)$$

Es folgen sofort die Gleichungen (A.66), (A.67) und (A.68), wie auch Gl. (A.69), (A.70) und (A.71), die statt der Energienenner genauer δ^+ -Funktionen enthalten⁽²³⁾. Inwieweit die hier zwangsläufig auftretenden δ^+ -Funktionen durch $\frac{1}{2}(\delta^+ - \delta^-)$ ersetzt werden dürfen, wird im nächsten Abschnitt besprochen.

Um die in B aus den invarianten Differentialgleichungen der Wellenfunktionen gewonnenen Beziehungen (B.VI) abzuleiten, benötigen wir noch die Integralgleichung

$$(13) \quad \varphi_t(\dot{\mathbf{y}}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) = \varphi_t^{-\infty}(\dot{\mathbf{y}}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) + ig \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{t'} dx'_1 dx'_2 L_K(\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{x}}'_1; \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1) \cdot \\ \cdot \gamma_5^1 S_K(x_2 - x'_2) \gamma_4^2 \varphi_t(|\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2|) - \text{symm.}$$

die analog zu Gl. (8) aus den Yang-Feldmangleichungen (1) und

$$(14) \quad \dot{A}(y) = \dot{A}_{\text{in}}(y) - \frac{ig}{2} \int_{-\infty}^t A(y - y') [\bar{\psi}(y'), \psi(y')] \gamma_5 dy'$$

erhalten wird. Durch Anwendung der Differentialoperatoren⁽²⁴⁾ $(\partial/\partial t + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)$, $\Delta + \kappa_0^2$ auf auf Gl. (3), (8) und (13) erhält man (zusammen mit den Energieeigenwertgleichungen von $\varphi_t(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|)$, $\varphi_t(\dot{\mathbf{y}}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)$ und $\varphi_t(\dot{\mathbf{y}}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)$) die Gleichungen (B.VI) in der hier behandelten Näherung⁽²³⁾.

⁽²³⁾ Die erwähnten Gleichungen in A und B enthalten allerdings statt m überall m_0 und dafür keine δm -Glieder. Vgl. zu diesem Punkt Anmerkung⁽¹³⁾.

⁽²⁴⁾ $\mathcal{f} = \alpha(\partial/\partial x) + i\beta m$.

5. – Diskussion der Randbedingungen.

Die inhomogenen Glieder der Gleichungen (3) und (8)

$$\begin{aligned}\varphi_t^{-\infty}(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) &= (\Omega, \psi_{\text{in}}(x_1)\psi_{\text{in}}(x_2)\Phi) = (\Omega'_0, \psi'_0(x_0)\psi'_0(x_2)\Phi'(-\infty)) \\ \varphi_t^{-\infty}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) &= (\Omega, A_{\text{in}}(y)\psi_{\text{in}}(x_1)\psi_{\text{in}}(x_2)\Phi) = (\Omega'_0, \psi'_0(x_1)\psi'_0(x_2)A'_0(y)\Phi'(-\infty))\end{aligned}\quad (25)$$

geben (bis auf eventuelle Beteiligung gebundener Zustände, siehe weiter unten) über die Randbedingungen zur Zeit $t = -\infty$ Auskunft. Um auch den Einfluß der Randbedingungen zur Zeit $t = +\infty$ diskutieren zu können, ziehen wir die aus den Yang-Feldmangelgleichungen

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi_{\text{out}}(x) - ig \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\text{Av}}(x-x')\gamma_5 A(x')\psi(x')dx' - \delta m \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\text{Av}}(x-x')\psi(x')dx', \\ A(y) &= A_{\text{out}}(y) + \frac{ig}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{\text{Av}}(y-y')[\bar{\psi}(y'), \psi(y')]\gamma_5 dy',\end{aligned}$$

abgeleiteten und zu den Gl. (3), (8) analogen Integralgleichungen

$$\begin{aligned}(15) \quad \varphi_t(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) &= \varphi_t^{+\infty}(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 S_{\text{Av}}(x_1-x'_1) S_{\text{Av}}(x_2-x'_2) \gamma_4^2 \cdot \\ &\quad \cdot \{g\gamma_5^1 \varphi_t(\mathbf{x}'_1|\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2|) - i\delta m \varphi_t(|\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2|)\} - \text{symm.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(16) \quad \varphi_t(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) &= \varphi_t^{+\infty}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) + ig \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2 L_{\text{Av}}(y-x'_1; x_1-x'_1) \gamma_5^1 \cdot \\ &\quad \cdot S_{\text{Av}}(x_2-x'_2) \gamma_4^2 \varphi_t(|\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2|) - \text{symm.}\end{aligned}$$

$$L_{\text{Av}}(z_1; z_2) = \Delta^+(-z_1)S_{\text{Av}}(z_2) + \Delta_{\text{Av}}(z_1)S^+(z_2)$$

$$\varphi_t^{+\infty}(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = (\Omega'_0, \psi'_0(x_1)\psi'_0(x_2)\Phi'(+\infty)),$$

$$\varphi_t^{+\infty}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = (\Omega'_0, \psi'_0(x_1)\psi'_0(x_2)A'_0(y)\Phi'(+\infty))$$

(²⁵) Ω'_0 ist das wechselwirkungsfreie Vakuum, $\psi'_0(x)$, $A'_0(y)$ bedeuten die wechselwirkungsfreien Feldoperatoren (zu den experimentellen Massen). Zur genauen Definition von $\Phi'(-\infty)$ vgl. B, Gl. (IIb).

hinzu, die im Impulsraum folgende Gestalt haben:

$$(17) \quad \varphi(|\mathbf{p}\mathbf{q}|) = \varphi^{+\infty}(|\mathbf{p}\mathbf{q}|) + \frac{ig}{(2\pi)^2} \delta_-(E - \eta_1(\mathbf{p})E_p - \eta_2(\mathbf{q})E_q) \cdot \\ \cdot \int d\mathbf{k} \{ \gamma^1 \varphi(\mathbf{k}|\mathbf{p}-\mathbf{k}, \mathbf{q}) + \gamma^2 \varphi(\mathbf{k}|\mathbf{p}, \mathbf{q}-\mathbf{k}) \} + \\ + 2\pi i \delta m \delta_-(E - \eta_1(\mathbf{p})E_p - \eta_2(\mathbf{q})E_q) (\gamma_4^1 + \gamma_4^2) \varphi(|\mathbf{p}\mathbf{q}|)$$

$$(18) \quad \varphi(\mathbf{k}|\mathbf{p}-\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \varphi^{+\infty}(\mathbf{k}|\mathbf{p}-\mathbf{k}, \mathbf{q}) + \\ + \frac{\pi ig}{\omega_k} \delta_-(E - \eta_1(\mathbf{p}-\mathbf{k})(E_{p-k} + \omega_k) - \eta_2(\mathbf{q})E_q) \gamma^1 \varphi(|\mathbf{p}\mathbf{q}|) + \\ + \frac{\pi ig}{\omega_k} \delta_-(E - \eta_1(\mathbf{p}-\mathbf{k})E_{p-k} - \eta_2(\mathbf{q})(E_q + \omega_k)) \gamma^2 \varphi(\mathbf{p}-\mathbf{k}, \mathbf{q}+\mathbf{k}).$$

Wir vergleichen die Beziehungen (11), (12) mit den Beziehungen (17), (18) zunächst ganz unabhängig von der speziellen Wahl der Randbedingungen. Die Funktionen

$$\varphi_i^{\pm\infty}(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|), \quad \varphi_i^{\pm\infty}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|)$$

lassen sich stets in der Form

$$(19) \quad \varphi_i^{\pm\infty}(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = \sum c_{\mu\nu}^{\pm} \{ \varphi_{\mu}^0(|x_1|) \varphi_{\nu}^0(|x_2|) - \varphi_{\nu}^0(|x_1|) \varphi_{\mu}^0(|x_2|) \}_{x_1^0 - x_2^0 = t}$$

$$(20) \quad \varphi_i^{\pm\infty}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = \sum c_{\lambda\mu\nu}^{\pm} \{ \varphi_{\mu}^0(|x_1|) \varphi_{\nu}^0(|x_2|) - \varphi_{\nu}^0(|x_1|) \varphi_{\mu}^0(|x_2|) \} \varphi_{\lambda}^0(y)_{x_1^0 - x_2^0 = y^0 = t}$$

nach vollständigen und orthonormierten Systemen $\{\varphi_{\mu}^0(|x|)\}$ und $\{\varphi_{\lambda}^0(y)\}$ von Energieimpulseigenlösungen der wechselwirkungsfreien Feldgleichungen (mit experimentellen Massenkonstanten) entwickeln. Nach Definition dürfen in Gl. (19), (20) nur die Lösungen $\varphi_{\mu}^0(|x|)$, $\varphi_{\lambda}^0(y)$ positiver Frequenzen einen Beitrag geben. Daraus folgt nach Subtraktion der Gl. (11) und (17), bzw. Gl. (12) und (18)

$$\varphi^{+\infty}(|\mathbf{p}\mathbf{q}|) - \varphi^{-\infty}(|\mathbf{p}\mathbf{q}|) = - \frac{ig}{(2\pi)^2} \delta(E - \eta_1(\mathbf{p})E_p - \eta_2(\mathbf{q})E_q) \cdot \\ \cdot \int d\mathbf{k} \{ \gamma^1 \varphi(\mathbf{k}|\mathbf{p}-\mathbf{k}, \mathbf{q}) + \gamma^2 \varphi(\mathbf{k}|\mathbf{p}, \mathbf{q}-\mathbf{k}) \} - \\ - 2\pi i \delta m \delta(E - \eta_1(\mathbf{p})E_p - \eta_2(\mathbf{q})E_q) (\gamma_4^1 + \gamma_4^2) \varphi(|\mathbf{p}\mathbf{q}|),$$

$$\begin{aligned}
\varphi^{+\infty}(\mathbf{k}|\mathbf{p}-\mathbf{k}, \mathbf{q}|) - \varphi^{-\infty}(\mathbf{k}|\mathbf{p}-\mathbf{k}, \mathbf{q}|) = \\
= -\frac{\pi ig}{\omega_k} \delta(E - \eta_1(\mathbf{p}-\mathbf{k})(E_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + \omega_k) - \eta_2(\mathbf{q})E_q) \gamma^1 \varphi(|\mathbf{p}\mathbf{q}|) - \\
- \frac{\pi ig}{\omega_k} \delta(E - \eta_1(\mathbf{p}-\mathbf{k})E_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - \eta_2(\mathbf{q})(E_q + \omega_k)) \gamma^2 \varphi(|\mathbf{p}-\mathbf{k}, \mathbf{q}+\mathbf{k}|),
\end{aligned}$$

daß auf den rechten Seiten alle Glieder verschwinden, die nicht δ -Funktionen der Form

$$\delta(E - E_1 - E_2) \quad \text{bzw.} \quad \delta(E - E_1 - E_2 - \omega)$$

enthalten. In den Integralgleichungen (11), (12) dürfen also alle diejenigen δ^+ -Funktionen durch $\frac{1}{2}(\delta^+ - \delta^-)$ ersetzt werden, die nicht Argumente der Form

$$E - E_1 - E_2, \quad E - E_1 - E_2 - \omega$$

besitzen. Das bedeutet, daß in der durch Einsetzen von (12) in (11) entstandenen Integralgleichung für $\varphi(|\mathbf{p}\mathbf{q}|)$ bei Integration über Energienenner der Form

$$E - E_1 + E_2 + \omega \quad \text{oder} \quad E - E_2 + E_1 + \omega \quad \text{oder} \quad E + E_1 + E_2 + \omega$$

der Hauptwert genommen werden kann.

Der Einfluß der Randbedingungen für $t = +\infty$ oder $-\infty$ soll nun im Einzelnen diskutiert werden. Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Φ sei der Grundzustand des Deuterons. Dann ist

$$\Phi'(-\infty) = \Phi'(+\infty) = 0 \quad (26)$$

und es folgt

$$\varphi_i^{\pm\infty}(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = \varphi_i^{\pm\infty}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2) = 0$$

die δ^+ -Funktion kann in diesem Fall also generell durch $\frac{1}{2}(\delta^+ - \delta^-)$ ersetzt werden.

2. Φ beschreibt die Streuung zweier Nukleonen der Wellenfunktionen $\varphi_1(|x|)$ und $\varphi_2(|x|)$, d.h. Φ hat die Form

$$\Phi = U'(0, -\infty)\Phi'(-\infty)$$

$$\Phi'(-\infty) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \bar{\psi}^-(x_1) \bar{\psi}^-(x_2) \gamma_4^2 \gamma_4^1 \{ \varphi_1(|x_1|) \varphi_2(|x_2|) - \varphi_2(|x_1|) \varphi_1(|x_2|) \} \mathcal{Q}'_0.$$

(26) S. FUBINI und M. CINI: *Nuovo Cimento*, **10**, 1695 (1953).

Es ist:

$$\varphi_t^{-\infty}(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = \varphi_1(|x_1|)\varphi_2(|x_2|) - \varphi_2(|x_1|)\varphi_1(|x_2|), \quad \varphi_t^{-\infty}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = 0$$

Im allgemeinen vereinfachen sich die Funktionen $\varphi^{+\infty}$ nicht weiter, falls aber die Erzeugung eines reellen Mesons mit Energie- und Impulssatz nicht verträglich ist, folgt

$$\varphi_t^{+\infty}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) = 0.$$

In diesem Sonderfall darf also in Gl. (12) δ^+ generell durch $\frac{1}{2}(\delta^+ - \delta^-)$ ersetzt werden.

Als letzte Möglichkeit erwähnen wir drittens den Zustand Φ , der die Streuung zweier Nukleonen mit den Wellenfunktionen $\varphi_1(|x|)$, $\varphi_2(|x|)$ und eines Mesons der Wellenfunktion $\varphi_3(y||)$ beschreibt. In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} \varphi_t^{-\infty}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) &= \varphi_3(y||)\{\varphi_1(|x_1|)\varphi_2(|x_2|) - \varphi_2(|x_1|)\varphi_1(|x_2|)\} \\ \varphi_t^{-\infty}(|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|) &= 0. \end{aligned}$$

Die weitere Möglichkeit der Streuung eines Mesons an einem Deuteron im Grundzustand wird erst erhalten, wenn im Gleichungssystem der einzeitigen Wellenfunktionen auch $\varphi_t(\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)$ berücksichtigt wird. Die allgemeinsten Zustände, die in der behandelten Näherung des Zwei-Nukleonenproblems, nämlich Vernachlässigung aller einzeitigen Wellenfunktionen außer der $|2|$ - und $1|2|$ -Wellenfunktion, überhaupt in Betracht kommen, gehen durch Linearkombination aus den besprochenen drei Möglichkeiten hervor.

RIASSUNTO (*)

Con l'ausilio del formalismo di Yang-Feldman si derivano equazioni integrali di funzioni d'onda monotemporali, i cui membri omogenei esprimono le condizioni al contorno al tempo $t = \pm \infty$.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Su di un'onda di pressione nei liquidi

A. CARRELLI e G. BRANCA

Istituto di Fisica dell'Università - Napoli

(ricevuto il 18 Marzo 1954)

Riassunto. — Se un liquido in cui si ha un sistema di onde ultrasonore stazionarie è attraversato da un fascio luminoso in direzione normale a quella lungo cui ha luogo la distribuzione di pressione, e quindi dell'indice di rifrazione, si osserva — come è ben noto — ad una certa distanza una serie di linee chiare ed oscure (HIEDEMANN). Sovrapponendo ora alla variazione di pressione periodica, prodotta dalle onde ultracustiche, un'altra variazione dipendente da una qualunque altra causa, ed avente la stessa direzione della prima, si osserva che tali righe si spostano parallelamente a loro stesse. Facendo scorrere una pellicola fotografica nella zona in cui si osservano le strie, si può misurare sui successivi fotogrammi lo spostamento di una generica riga luminosa (o oscura). Se le direzioni di propagazione degli ultrasuoni e dell'onda di pressione sono normali fra di loro e normali alla direzione del fascio luminoso non si osserva alcuno spostamento delle frange. Con tale dispositivo si può dunque rilevare la presenza di un'onda di pressione in seno a un liquido, mediante un metodo ottico.

Com'è noto, quando in un liquido si propaga un sistema di onde ultrasonore stazionarie, si ha in esso una distribuzione di pressione variabile col tempo e con la posizione, distribuzione che produce a sua volta una variazione di indice di rifrazione, che segue la stessa legge. Se un fascio luminoso attraversa il mezzo in cui ha luogo tale distribuzione di indice, l'onda, all'uscita del mezzo, presenta una « modulazione di fase » che dà luogo ai ben conosciuti fenomeni di diffrazione; e cioè si hanno strati del mezzo alternativamente condensati e rarefatti che generano le note manifestazioni.

Lungo l'asse ottico del sistema cioè, a partire da una certa distanza, sono visibili mediante una lente di ingrandimento, o anche ad occhio nudo, con l'ausilio di un vetro smerigliato, delle strie luminose che occupano tutto il

campo. Tali strie, parallele alla fenditura del collimatore, costituiscono una sorta di reticolo, che acquista la massima nettezza in una determinata posizione. Il processo formativo di tale reticolo è, com'è noto, il seguente: i raggi luminosi incidenti, supposti paralleli fra di loro e normali alla direzione x di propagazione del fascio ultrasonoro, penetrano nella regione che possiede una rifrangenza variabile ed il calcolo ⁽¹⁾ dimostra che pur essendo il punto di convergenza variabile, essi convergono per un tempo più lungo durante tutto il periodo d'oscillazione in una certa zona, dove appunto si formano le strie luminose di cui si è parlato.

Supponiamo ora che alla variazione di pressione periodica in t ed in x si aggiunga lungo la stessa direzione x una variazione di pressione dipendente da una qualunque altra causa. Si può pensare, ad esempio, che la nuova onda di pressione sia rappresentabile schematicamente mediante la curva in fig. 1 a) e che essa si sposti lungo x con la velocità di propagazione delle onde elastiche. Dunque in un certo istante la distribuzione di p per effetto dei soli ultrasuoni è data dalla

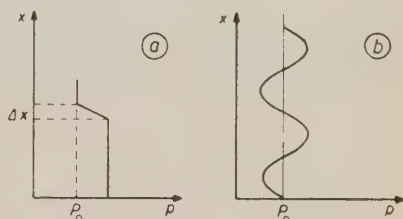


Fig. 1.

fig. 1 b), e per la presenza contemporanea dell'onda di pressione, la distribuzione della pressione sarà data dalla somma delle due curve riportate.

Si suppone, come si ricava dalle due figure, che l'intervallo Δx in cui si ha la variazione di pressione sia dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda λ degli ultrasuoni.

Quando le due onde di pressione coesistono, durante il periodo di tempo Δt che l'onda Δp della fig. 1 impiega per propagarsi lungo l'asse x della vaschetta, è da prevedersi una variazione dell'andamento delle strisce chiare e oscure e più precisamente queste righe per effetto della variazione Δp debbono spostarsi. In altre parole tutto avviene come se l'unica discontinuità nella distribuzione dell'indice di rifrazione, dovuta all'onda di pressione, producesse localmente un effetto analogo a quello che si è riconosciuto nel caso dell'onda ultrasonora; vale a dire che i raggi luminosi modificano la loro traiettoria nella zona di discontinuità. Ma poichè le due onde si propagano simultaneamente, all'incurvamento dovuto all'onda ultrasonora e che produce il reticolo, si aggiunge un incurvamento dovuto all'onda di pressione e che determina in un certo istante lo spostamento delle frange. Poichè, come si è detto, la discontinuità dovuta all'onda di pressione viaggia con la velocità dell'onda elastica, in un tempo brevissimo e cioè nel tempo Δt dato dal quoziente del tratto l

(1) R. LUCAS e P. BIQUARD: *Journ. de Phys.*, 3, 471 (1932).

lungo il quale si propaga l'onda e della velocità V dell'onda stessa, tutte le successive frange saranno interessate, per modo che alla fine il reticolo apparirà spostato.

Noi abbiamo sperimentalmente messo in evidenza questo processo di propagazione dell'onda di pressione nel liquido col dispositivo rappresentato schematicamente in fig. 2:

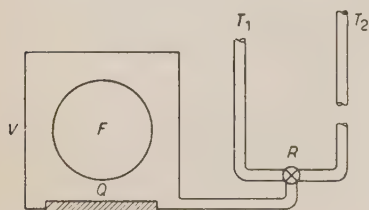


Fig. 2.

Il mezzo contenuto in V può porsi in comunicazione — mediante il rubinetto a due vie R — con il ramo T_1 oppure con il ramo T_2 di un tubo ad U . Il livello del liquido in T_1 è uguale a quello che esso raggiunge in V , per cui, stabilita la comunicazione tra V e T_1 , il li-

quido stesso risulta sottoposto alla pressione atmosferica. In T_2 invece vi è un dislivello di una quarantina di cm, rappresentato da una colonna di Hg, per cui la pressione addizionale che si propaga nel mezzo, una volta posti in comunicazione V e T_2 , è di circa $1/2$ atm. La velocità di tale propagazione è evidentemente la velocità di spostamento delle perturbazioni elastiche e cioè, nel caso specifico, trattandosi di acqua, tale velocità è di 1399 m/s. Tenuto conto che la zona di osservazione della vaschetta è di 3 cm, il tempo Δt di propagazione del Δp (e quindi della variazione di indice ad esso connessa) è dell'ordine di 10^{-5} s, mentre il periodo degli ultrasuoni è dell'ordine di 10^{-6} s. Questo significa che, mentre il Δp attraversa la zona di osservazione, il reticolo si è creato e distrutto circa 10 volte.

Abbiamo potuto accertare, guardando il reticolo, che effettivamente nel periodo in cui si propaga l'onda di pressione è nettamente visibile il previsto spostamento delle frange. Lo spostamento si osserva anche nella fase di decompressione ed ha luogo naturalmente in senso opposto a quello che si ha nella compressione.

Si è voluto poi ottenere una prova obbiettiva che permettesse una misura, e si è proceduto nel modo seguente: si è fatto scorrere una pellicola cinematografica, nella zona in cui il reticolo acquista il massimo di nettezza, alla velocità di 8 fotogrammi al secondo e si è poi misurato su di essa lo spostamento di una generica frangia: si ottiene in tal modo il grafico di fig. 3

V è la vaschetta che porta nella parte inferiore il quarzo Q e lateralmente due finestre per consentire il passaggio dei raggi luminosi. Il mezzo contenuto in V può porsi in comunicazione — mediante il rubinetto a due vie R — con il ramo T_1 oppure con il ramo T_2 di un tubo ad U . Il livello del liquido in T_1 è uguale a quello che esso raggiunge in V , per cui, stabilita la comunicazione tra V e T_1 , il li-

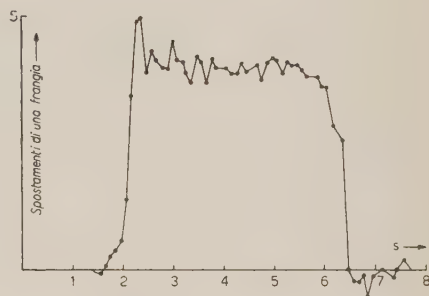


Fig. 3.

in cui sono chiaramente osservabili le due fasi di compressione e di decompressione.

Accelusi si riportano gli ingrandimenti di tre fotogrammi, che mostrano le successive posizioni assunte da una frangia rispetto ad un segno di riferimento.

A conferma di quanto precede si è eseguita una seconda esperienza in cui le direzioni di propagazione degli ultrasuoni e quella dell'onda di pressione

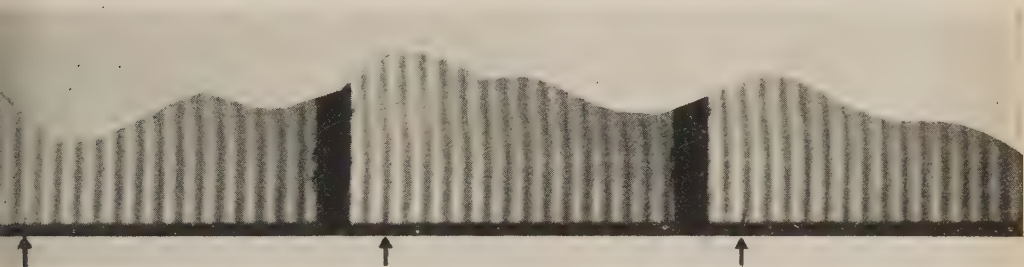


Fig. 4.

sono normali fra di loro e normali alla direzione del fascio luminoso. Com'era da aspettarsi nessuno spostamento delle frange si verifica in tali condizioni.

Infine si è modificato il dispositivo illustrato nella fig. 2 abolendo il rubinetto R e producendo l'onda di pressione con l'innalzare un tubo flessibile pieno di Hg collegato al ramo T_2 e ciò allo scopo di verificare se l'effetto potesse dipendere da uno scuotimento meccanico del sistema. Anche questa prova ha pienamente confermato lo spostamento del reticolo ed ha permesso inoltre di stabilire un punto fondamentale, che cioè l'effetto dipende non solo dal valore di Δp ma anche da Δt e cioè dall'intervallo di tempo durante il quale si ha la variazione di pressione.

Questo dispositivo si presenta dunque particolarmente indicato quando si voglia misurare l'andamento di un'onda di pressione in un liquido, essendo sicuri con tale metodo che non si ha alcuna inerzia dipendente da dispositivi meccanici (indici, leve, ecc.).

APPENDICE

Nella ipotesi fatta (fig. 1) la variazione della pressione è una funzione $f(t)$ data in un intervallo infinito e si è supposto che l'andamento di Δp che è collegato alla variazione dell'indice di rifrazione dalla relazione

$$\Delta p = \frac{1}{\mu} \frac{8n_0^2}{(n_0^2 - 1)(n_0^2 + 2)} \frac{\Delta n}{n_0} \quad (*),$$

(*) R. LUCAS e P. Biquard: op. cit.

essendo μ il coefficiente di compressibilità ed n_0 l'indice di rifrazione, sia quello di fig. 5. Tale $f(t)$ può esprimersi mediante integrale di Fourier. Definiremo una nuova funzione $\varphi(t)$ mediante le posizioni (fig. 5)

$$\varphi(t) = f(t) \quad \text{per} \quad |t| \leq t_{\frac{1}{2}} = \tau, \quad \varphi(t) = 0 \quad \text{per} \quad |t| > t_{\frac{1}{2}} = \tau.$$

La $\varphi(t)$ sviluppata in integrale di Fourier da

$$\varphi(t) = 2i \int_0^{\infty} C(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

i cui coefficienti possono calcolarsi facilmente e sono:

$$(1) \quad C(\omega) = \frac{2K}{\omega^2} \sin \omega \tau,$$

essendo $K = \operatorname{tg} \alpha$. Può dunque dirsi che nell'onda di pressione discontinua ci siano onde progressive di tutte le pulsazioni ω . Più particolarmente le ampiezze $C(\omega)$ sono date dalla (1) che è graficamente riportata in fig. 6: si vede che hanno importanza solo le onde di pulsazione piut-

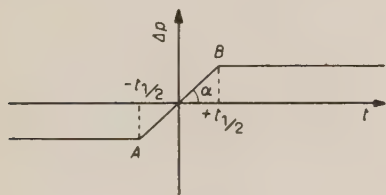


Fig. 5.

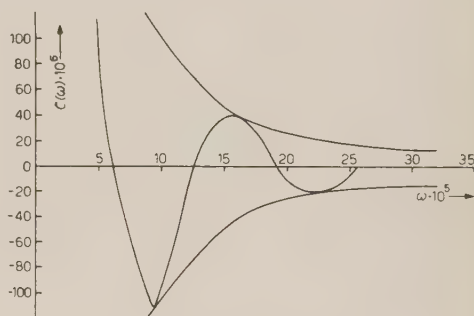


Fig. 6.

tosto basse e quanto più grande è $K = \Delta p / \Delta t$ le più alte pulsazioni diventano più efficaci.

Può dunque dirsi che nell'onda di pressione discontinua, e cioè del tipo riportato nelle figg. 1a) e 5 esistono onde progressive di tutte le pulsazioni ω . In particolare le ampiezze $C(\omega)$ sono date dalla (1) che è graficamente riportata in fig. 6, la quale è stata ottenuta per $2\tau = 2 \cdot 10^{-5}$ s e nella ipotesi $K = 1$ ($\alpha = 45^\circ$).

Si vede che tali ampiezze assumono tutti i valori compresi tra $+\infty$ e $-\infty$. Infatti

$$\lim_{\omega \rightarrow 0+0} C(\omega) = +\infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0-0} C(\omega) = -\infty.$$

Inoltre i massimi e i minimi intermedi si hanno per

$$\omega = \frac{(2n+1)\pi}{2\tau},$$

ossia per valori del periodo che siano dello stesso ordine di grandezza dell'intervallo di tempo in cui ha luogo la variazione di pressione (o multipli di esso). Le onde corrispondenti a tali pulsazioni si sommano con l'onda sinusoidale generata dagli ultrasuoni, se, evidentemente le onde hanno lo stesso periodo.

Questa semplice osservazione da ragione del fatto che producendo una variazione lenta di pressione non si osserva col nostro dispositivo lo spostamento delle frange; infatti in tal caso il periodo delle onde che compongono l'onda di pressione è più grande di quello degli ultrasuoni.

Volendo osservare il fenomeno in tali condizioni occorrerebbe variare la frequenza del circuito oscillante sino ad « accordarla » con la frequenza delle onde costituenti l'onda di pressione.

SUMMARY

If a liquid in which there is a system of stationary ultrasonic waves is crossed by a light in direction normal to the one along which exists the variation of pressure and therefore of the reflection index, one observes, as it is well known, at a certain distance, a number of clear and dark lines (HIEDEMANN). Superposing now to the periodic variation of pressure due to ultrasonics another variation due to any other reason, and having the same direction as the first one, we observe that the lines deplace parallel to themselves. Taking a sequence of pictures on a film placed in the spot where we observe the lines, one can measure on the series of photograms the displacement of any line (either a luminous or a dark one). If the direction of propagation of ultrasonics and the direction of the pressure wave are perpendicular to each other, and both perpendicular to the direction of light, one does not observe any displacement of the lines. With such an experimental arrangement a pressure wave in a liquid can be detected with an optical method.

Sulla struttura elettronica del nitrobenzolo.

M. SIMONETTA e A. VACIAGO

Istituto di Chimica Generale e Analitica del Politecnico - Milano

(ricevuto il 3 Aprile 1954)

Riassunto. — È presentato un calcolo di alcune grandezze fisiche del nitrobenzolo mediante il metodo M.O. con una ragionevole scelta dei parametri necessari. Per il momento elettrico, la frequenza del primo massimo di assorbimento nell'ultravioletto, le densità elettroniche, gli ordini di legame, gli indici di valenza libera e l'energia di risonanza si ottengono valori in ottimo accordo con le previsioni. Anche il comportamento cinetico prevedibile nelle reazioni di sostituzione dei vari tipi concorda con i dati sperimentali: è valida la « chemical non-crossing rule ».

1. — Introduzione.

Nell'applicazione della teoria degli orbitali molecolari (M.O.) nella sua approssimazione standard di combinazione lineare di orbitali atomici (L.C.A.O.) a molecole complesse contenenti eteroatomi, uno dei punti di maggior difficoltà è l'assegnazione di opportuni valori ai parametri necessari per tener conto della natura chimica degli eteroatomi presenti. Si è ricorso essenzialmente a metodi semi-empirici, ma anche questa via conduce a risultati incerti, soprattutto per il fatto che il valore di alcune delle grandezze fisiche per le quali sono a disposizione dati sperimentali di confronto appare pressochè indipendente dai valori assegnati ai parametri necessari, purchè scelti entro limiti ragionevoli ⁽¹⁾. Recentemente JAFFÉ ⁽²⁾ ha sviluppato un metodo empirico per la determinazione dei migliori valori per questi parametri, nel caso di composti benzenici monosostituiti, basato sulla correlazione tra le costanti σ di Ham-

⁽¹⁾ H. C. LONGUET-HIGGINS e G. W. WHELAND: *Ann. Rev. Phys. Chem.*, **1**, 138 (1950).

⁽²⁾ H. H. JAFFÉ: *Journ. Chem. Phys.*, **20**, 279, 778 (1952).

mett ⁽³⁾ e le densità elettroniche nei vari atomi di carbonio nel nucleo benzenico. JAFFÉ ha preso in esame i seguenti derivati del benzolo: fluoro-, bromo-, cloro-, iodo-benzolo, fenolo, tiofenolo, anisolo, anilina e toluolo, ed ha stabilito per via empirica la seguente relazione:

$$(1) \quad \sigma = -15,5(q-1),$$

dove σ è la costante di Hammett per la posizione meta o para e q la corrispondente densità elettronica. In tutti i casi considerati il gruppo sostituito contribuisce con un orbitale π al sistema in risonanza, mentre per il nitrobenzolo gli orbitali π sono complessivamente nove. Il nitrogruppo si distingue dai sostituenti considerati da JAFFÉ anche per avere un potere di attrazione degli elettroni notevolmente superiore, in conseguenza del fatto che effetto induttivo ed effetto di risonanza si sommano. Sono quindi da aspettarsi variazioni di concentrazione elettronica sensibili, il che pone in dubbio la validità di una delle ipotesi di Jaffé, cioè che, ammesso che σ sia una funzione monotona di Δq , questa funzione si possa sviluppare in serie e i termini con potenza di Δq superiore alla prima siano trascurabili. Inoltre, se Δq non è piccolo, l'integrale di Coulomb dell'atomo sede di tale variazione non è più indipendente dalla variazione stessa. Un altro fatto che fa apparire poco probabile l'applicabilità del metodo di Jaffé al nitrobenzolo appare evidente considerando i valori di q ottenuti dai valori sperimentali $\sigma_m = +0,710$ e $\sigma_p = +0,779$ mediante l'equazione (1): $q_m = 0,954$ e $q_p = 0,950$. Mentre ciascun valore preso a sè potrebbe essere accettabile, la loro differenza sembra troppo piccola per render conto dell'effetto decisamente meta-orientante del gruppo NO_2 nelle reazioni di sostituzione elettrofila degli atomi di idrogeno del nucleo benzenico: da questo punto di vista miglior risultato avevano ottenuto WHELAND e PAULING ⁽⁴⁾: $q_p = 0,61$; $q_m = 0,95$; $q_o = 0,79$.

Abbiamo comunque eseguito alcuni calcoli orientativi. I parametri in gioco sono l'integrale di Coulomb dell'atomo di azoto e di ossigeno (α_N e α_O) e l'integrale di scambio per i legami azoto-carbonio e azoto-ossigeno (γ_{NC} e γ_{NO}). Per applicare il metodo di Jaffé abbiamo in un primo tempo fissato due di tali parametri:

$$\alpha_O = 0,5 \quad \text{e} \quad \gamma_{NO} = 1$$

(in unità β , dove β è l'integrale di scambio C—C nel benzolo).

Il primo di questi valori corrisponde a quello trovato da JAFFÉ nel suo trattamento del fenolo e dell'anisolo, mentre il secondo si uniforma all'uso

⁽³⁾ L. P. HAMMETT: *Physical Organic Chemistry* (New York, 1941), cap. VII; H. H. JAFFÉ: *Chem. Rev.*, **53**, 191 (1953).

⁽⁴⁾ G. W. WHELAND e L. PAULING: *J.A.C.S.*, **57**, 2086 (1935).

corrente. Inoltre, conformemente a JAFFÉ, abbiamo posto $\alpha_{c_n} = 1/3^n \alpha_N$, dove α_{c_n} è l'integrale di Coulomb per l'atomo di C separato da n legami dall'atomo di N. Naturalmente la nostra equazione secolare è risultata del nono ordine e fattorizzabile in una equazione di sesto e una di terzo grado. Le radici di queste equazioni rappresentano i livelli energetici corrispondenti ai vari orbitali molecolari $\psi_j = \sum_i a_{ji} \varphi_i$ (dove: $j, i = 1, 2, \dots, 9$; e le φ_i rappresentano gli orbitali atomici p_z).

Abbiamo calcolato successivamente i valori dei coefficienti a_{ji} e le densità elettroniche ai vari atomi: $q_i = 2 \sum_j a_{ji}^2$ ($j = 1, 2, \dots, 5$ in corrispondenza ai 5 orbitali leganti). Con i valori q_m e q_p per varie coppie α_N, γ_{NC} abbiamo costruito i grafici riportati in fig. 1, 2, 3, dove è $\xi = (1 - q_p)/(1 - q_m) = \sigma_p/\sigma_m$. Per il nitrobenzolo $\xi = 1,1$. Pertanto, trasportando la linea $\xi = 1,1$ dal grafico 3

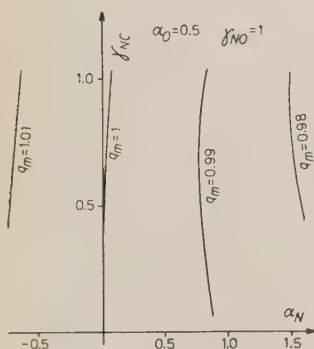


Fig. 1. - Linee di livello
 $q_m = f_1(\alpha_N, \gamma_{NC})$.

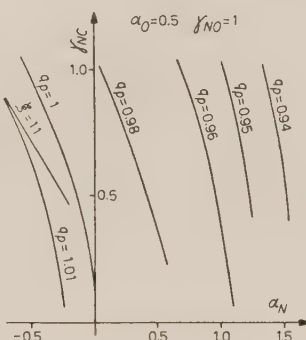


Fig. 2. - Linee di livello
 $q_p = f_2(\alpha_N, \gamma_{NC})$.

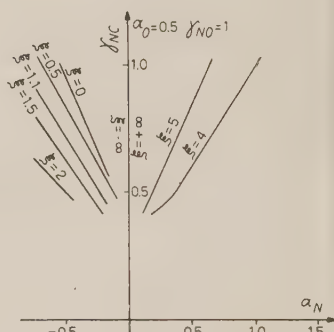


Fig. 3. - Linee di livello
 $\xi = f_3(\alpha_N, \gamma_{NC})$.

sul grafico 1 o sul grafico 2, l'intersezione con la linea $q_m = 0,954$ o con la linea $q_p = 0,950$ dovrebbe dare i valori di α_N e γ_{NC} .

Ma nel campo dei valori ragionevoli di α_N e γ_{NC} non si ha intersezione; inoltre la linea $\xi = 1,1$ cade nel campo dei valori negativi di α_N , mentre l'elettronegatività dell'azoto relativa al carbonio, aumentata poi dalla presenza dell'ossigeno, e il fatto dimostrato sperimentalmente ⁽⁵⁾ che il momento elettrico è diretto dal nucleo benzenico verso il gruppo NO_2 permettono di prevedere un valore positivo per α_N ; in corrispondenza poi alla linea $\xi = 1,1$ è $q_p > q_m > 1$, in disaccordo con l'esperienza.

Benchè apparisse poco probabile che l'insuccesso del metodo di Jaffé dipendesse dalla scelta fatta per α_0 e γ_{NO} , abbiamo saggiato l'influenza di tali

⁽⁵⁾ L. G. GROVES e S. SUGDEN: *Journ. Chem. Soc.*, 1094 (1934).

parametri per valori di α_o e γ_{NO} compresi tra 0,5 e 2: in nessun caso abbiamo ottenuto risultati anche approssimativamente soddisfacenti.

2. - Momento elettrico di risonanza e transizioni elettroniche $N \rightarrow V$.

Abbandonate pertanto le costanti σ come grandezze sperimentali fondamentali per la scelta dei parametri nel caso del nitrobenzolo, abbiamo rivolto la nostra attenzione ad un'altra costante fisica direttamente collegata con le concentrazioni degli elettroni π : il momento elettrico di risonanza. Tale momento, dovuto alla non uniforme distribuzione degli elettroni π , in una molecola aromatica⁴ monosostituita C_6H_5X ha un valore determinabile come differenza tra il momento di tale molecola e quello di una molecola RX di riferimento in cui R sia un radicale alchilico che non contenga elettroni π . Per il nitrobenzolo abbiamo scelto come sostanza di riferimento il nitrometano. I valori sperimentali più attendibili per i momenti dipolari di queste sostanze, espressi in unità Debye, sono:

per il nitrobenzolo 4,27 ⁽⁵⁾ o 4,22 ⁽⁶⁾

per il nitrometano 3,57 ⁽⁷⁾ o 3,44 ⁽⁸⁾.

Da questi dati abbiamo dedotto un valore medio per il momento di risonanza del nitrobenzolo: $\mu = 0,75 D$.

Per il calcolo di tale momento per via teorica è necessario conoscere oltre i valori di q per tutti gli atomi, la struttura geometrica delle due molecole.

Per quanto sappiamo, non esistono dati sperimentali per il nitrobenzolo (liquido a temperatura ordinaria); pertanto dai lavori di LLEWELLYN ⁽⁹⁾ e ABRAHAMS ⁽¹⁰⁾ relativi allo studio roentgenografico dei cristalli di p-dinitrobenzolo, abbiamo dedotto il seguente modello approssimato per la molecola $C_6H_5NO_2$ allo stato di gas: nitrogruppo e nucleo benzenico coplanari (*), regolarità dell'anello benzenico esagonale, $N-O = 1,23 \text{ \AA}$, $N-C = 1,41 \text{ \AA}$, $\widehat{ONO} = 124^\circ$.

Abbiamo inoltre ammesso che la struttura geometrica del gruppo NO_2 nel nitrometano sia praticamente uguale a quella dello stesso gruppo nel nitro-

⁽⁶⁾ K. B. MCALPINE e C. P. SMYTH: *Journ. Chem. Phys.*, **3**, 55 (1935).

⁽⁷⁾ L. G. GROVES e S. SUGDEN: *Journ. Chem. Soc.*, 158 (1937).

⁽⁸⁾ C. P. SMYTH e K. B. MCALPINE: *J.A.C.S.*, **56**, 1697 (1934).

⁽⁹⁾ F. J. LLEWELLYN: *Journ. Chem. Soc.*, 884 (1947).

⁽¹⁰⁾ S. C. ABRAHAMS: *Acta Cryst.*, **3**, 194 (1950).

(*) Nel calcolo di μ l'eventuale angolo fra i piani del nucleo benzenico e del nitrogruppo, imputabile alla repulsione di Van der Waals tra gli atomi di ossigeno e gli atomi di idrogeno in posizione orto, non ha influenza.

benzolo: i dati sperimentali trovati in letteratura ^(11,12) sono sostanzialmente in accordo con questa ipotesi. Per il calcolo del momento dipolare di mesomeria sono necessarie anche le concentrazioni elettroniche per gli atomi di azoto e ossigeno nel nitrometano, calcolate per gli stessi valori di α_o , γ_{NO} e α_N usati per il nitrobenzolo. Tale calcolo è stato pure eseguito secondo il metodo standard M.O.-L.C.A.O., trascurando l'effetto di iperconiugazione. Il calcolo di μ è stato eseguito per tutti quei casi che avevano presentato densità elettroniche ragionevoli (in particolare $q_m > q_o > q_p$): i valori trovati sono compresi tra 0,8948 e 4,9290, cioè sono tutti superiori al dato sperimentale: però il minore di essi, corrispondente al gruppo di parametri:

$$(2) \quad \alpha_o = 1; \quad \gamma_{NO} = 1; \quad \alpha_N = 0,5; \quad \gamma_{NC} = 0,5$$

può essere considerato, nell'ambito delle nostre approssimazioni, in discreto accordo con l'esperienza. D'altra parte i valori così ottenuti rappresentano una scelta ragionevole, perchè sono in accordo con le elettronegatività dell'ossigeno e dell'azoto relative al carbonio ⁽¹³⁾ e con i presunti ordini dei legami N—O e N—C. Anche i valori per le concentrazioni elettroniche si possono considerare soddisfacenti.

$$q_p = 0,9707, \quad q_o = 0,9818, \quad q_m = 0,9939.$$

Per tutte le scelte di integrali di Coulomb e di scambio da noi eseguite abbiamo determinato mediante il metodo semiempirico di MATSEN ⁽¹⁴⁾ un'altra grandezza confrontabile con l'esperienza, precisamente la variazione di energia corrispondente alle transizioni $N \rightarrow V$, cioè al passaggio di elettroni π su livelli eccitati: esse corrispondono al caratteristico assorbimento nel primo ultravioletto, osservato negli spettri di molecole contenenti sistemi di doppi legami coniugati. Le determinazioni dello spettro di assorbimento nell'ultravioletto del nitrobenzolo in soluzione sono numerosissime, ma più interessante per noi è lo spettro allo stato di vapore. L'unico lavoro in materia pare essere la determinazione fatta da BERTON per scopi analitici ⁽¹⁵⁾, dove per il primo massimo del benzolo e del nitrobenzolo sono dati i valori:

$$\lambda_{C_6H_5NO_2} = 2885 \text{ \AA}; \quad \lambda_{C_6H_6} = 2667 \text{ \AA},$$

⁽¹¹⁾ L. O. BROCKWAY: *Rev. Mod. Phys.*, **8**, 231 (1936).

⁽¹²⁾ F. ROGOWSKI: *Ber. dtsh. chem. Ges.*, **B 75**, 244 (1942).

⁽¹³⁾ L. PAULING: *The Nature of Chemical Bond* (Ithaca, 1939).

⁽¹⁴⁾ F. A. MATSEN, W. W. ROBERTSON e J. F. MUSIC: *J.A.C.S.*, **72**, 5243, 5248 5250, 5252, 5256, 5260 (1950).

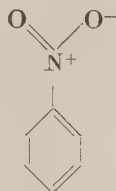
⁽¹⁵⁾ A. BERTON: *Ann. de Chim.*, (11) **19**, 394 (1944).

da cui si ricava per il nitrobenzolo un valore «sperimentale» $\Delta E = -1,8$ (nelle solite unità β). Tra tutti i valori teorici il più vicino è ancora quello ottenuto mediante gli integrali (2), eguale a $-1,7880$.

3. - Energia di risonanza e diagramma molecolare.

Adottati pertanto i valori (2), abbiamo calcolato alcune grandezze più facilmente determinabili con il metodo M.O. e precisamente l'energia di risonanza, gli ordini di legame mobile e gli indici di valenza libera.

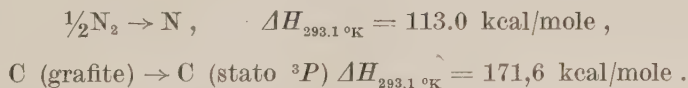
La prima grandezza è ricavabile come differenza dell'energia degli elettroni π nel caso di completa delocalizzazione e nel caso di un sistema fittizio in cui tutti i legami siano localizzati:



È risultato $E.R. = 2,9146 \beta = -58,292$ kcal/mole, se si assegna a β il valore corrente di -20 kcal/mole.

Il confronto con l'energia di risonanza «empirica», dedotta dai valori dell'energia dei legami presenti nella molecola e dal calore di combustione del nitrobenzolo, presenta alcune difficoltà.

Una difficoltà di carattere generale in problemi di questo tipo deriva dal fatto che la maggior parte dei dati termochimici dai quali si deducono le energie di legame a 0°K sono invece riferiti alla temperatura di 20 o 25°C : peraltro le imprecisioni così introdotte sono trascurabili nel nostro ordine di approssimazione. Una seconda difficoltà deriva dalla nota discordanza dei valori dell'entalpia di dissociazione della molecola N_2 e di sublimazione del carbonio riportati in letteratura. La questione è tuttora aperta: peraltro, soprattutto in base alle esperienze di KISTIAKOWSKY, KNIGHT e MALIN⁽¹⁶⁾ abbiamo adottato i valori seguenti:



La difficoltà più grave deriva dalla mancanza di precise determinazioni

⁽¹⁶⁾ G. B. KISTIAKOWSKY, H. T. KNIGHT e M. E. MALIN: *Journ. Chem. Phys.*, **20**, 876 (1952).

per il gruppo N_+^{O} : l'unico valore trovato in letteratura (SYRKIN e DYATKINA ⁽¹⁷⁾) è più che altro un ordine di grandezza: 169–186 kcal/mole. L'ostacolo può essere evitato calcolando l'energia degli elettroni π per il seguente sistema fittizio



nel quale sono localizzati solo i doppi legami dell'anello benzenico. Si ottiene così l'energia di risonanza del nitrobenzolo dovuta al solo anello benzenico:

$$\text{E.R.} = 2,104\beta = -42,08 \text{ kcal/mole.}$$

Facciamo notare che la differenza col valore precedente (~ 16 kcal/mole) è circa eguale all'energia di risonanza calcolata per lo ione allilico: $\text{CH}_2^+-\text{CH}=\text{CH}_2$.

Per ottenere il valore « sperimentale » da confrontare, occorrerà l'energia di legame empirica del nuovo sistema fittizio: a tale scopo è necessario conoscere (ad esempio dall'entalpia di formazione del nitrometano gassoso) l'energia di legame del gruppo NO_2 . Abbiamo adottato per le entalpie di formazione del nitrobenzolo e del nitrometano liquidi dagli elementi nello stato standard e per le relative entalpie di evaporazione i dati riportati da D'ANS e LAX ⁽¹⁸⁾, e per le energie di legame i valori di COATES e SUTTON ⁽¹⁹⁾, senza applicare correzioni, nonostante alcune lievi differenze nelle temperature di riferimento (comportanti peraltro errori certamente trascurabili in rapporto alle nostre approssimazioni). Abbiamo ottenuto:

$$\text{E.R. (empirica)} = -41,41 \text{ kcal/mole,}$$

in ottimo accordo con il valore teorico.

L'ordine di legame mobile tra gli atomi n e i , p_{ni} , e l'indice di valenza libera

⁽¹⁷⁾ Y. K. SYRKIN e M. E. DYATKINA: *Structure of Molecules* (London, 1950), p. 240.

⁽¹⁸⁾ J. D'ANS e E. LAX: *Taschenbuch für Chemiker und Physiker* (Berlin, 1949), p. 721.

⁽¹⁹⁾ G. E. COATES e L. E. SUTTON: *Journ. Chem. Soc.*, 1187 (1948).

⁽²⁰⁾ C. A. COULSON: *Proc. Roy. Soc., A* 269, 413 (1939).

dell'atomo n , F_n , nel nitrobenzolo sono definiti dalle relazioni:

$$p_{ni} = \sum_j^5 2a_{jn}a_{ji} \quad (20), \quad F_n = \sqrt{2} - \sum_i p_{ni} \quad (21),$$

dove gli a_{jn} e a_{ji} sono i coefficienti degli orbitali atomici dell'atomo n e i nell'orbitale molecolare j e la sommatoria va estesa ai cinque orbitali molecolari leganti; la $\sum_i p_{ni}$ va estesa a tutti i legami partenti dall'atomo n e come atomo n si intendono gli atomi di carbonio in posizione orto, meta o para al nitrogruppo. I risultati numerici sono riportati nel diagramma molecolare di fig. 4, unitamente ai valori delle concentrazioni elettroniche e ai valori delle distanze interatomiche prevedibili. Questi ultimi sono stati ricavati per i legami C—C mediante la formula ⁽²⁰⁾:

$$R = s - \frac{s-d}{1+k(1-p)/p}$$

dove R è la lunghezza cercata in Å, p è l'ordine di legame mobile, s è la lunghezza di un legame semplice (1,540 Å), d quella di un legame doppio (1,340 Å) e k è una costante (0,8095) scelta in modo che la curva « lunghezza di legame/ordine di legame » passi per il punto corrispondente al legame triplo (1,204 Å).

I valori delle costanti qui riportati non sono quelli originali di COULSON, ma quelli recentemente pubblicati da MOSER ⁽²²⁾.

Per il calcolo delle lunghezze dei legami C—N e N—O abbiamo invece fatto ricorso alla formula di Gordy ⁽²³⁾, malgrado questa sia stata stabilita per atomi con cariche relative trascurabili (noi abbiamo invece 1,1644 cariche elettroniche formali sull'azoto e 0,5969 su ciascun atomo di ossigeno). Peraltro i valori ottenuti risultano in buon accordo con i valori « sperimentali » citati precedentemente.

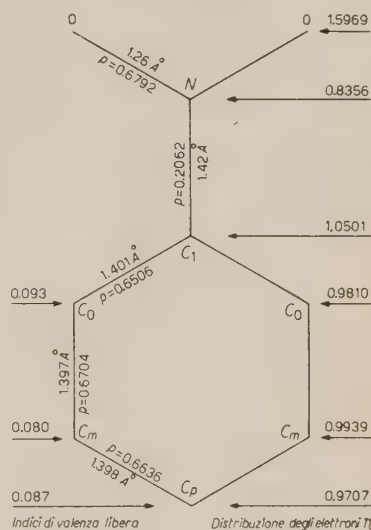


Fig. 4. -- Diagramma molecolare per il nitrobenzolo.

⁽²¹⁾ C. A. COULSON: *Faraday Soc. Discussion*, 2, 9 (1947); *Journ. de Chim. Phys.*, 45, 243 (1948).

⁽²²⁾ C. M. MOSER: *Journ. Chem. Soc.*, 1073 (1953).

⁽²³⁾ W. GORDY: *Journ. Chem. Phys.*, 15, 305 (1947).

4. — Effetto orientante del nitrogruppo.

Conoscendo le densità elettroniche, gli indici di valenza libera e i livelli energetici degli elettroni è possibile calcolare per il nitrobenzolo l'ordine di reattività delle posizioni orto, meta e para nelle reazioni di sostituzione nucleofila, elettrofila e di tipo radicalico. I metodi approssimati a disposizione sono essenzialmente due⁽²⁴⁾: l'approssimazione della molecola isolata e la teoria della localizzazione, entrambi basati sull'ipotesi che nel confronto tra la reattività delle varie posizioni in una molecola contenente elettroni π l'entropia di attivazione si possa considerare costante, e l'energia di attivazione dipenda essenzialmente dalla variazione dell'energia degli elettroni π nel passaggio dalla molecola iniziale al complesso attivato. Per l'applicazione della teoria della localizzazione abbiamo determinato i valori dei livelli energetici nei seguenti modelli di complesso attivato:



I valori così ottenuti per l'energia di attivazione nelle varie posizioni e per i vari tipi di reazione sono riportati nella tabella I (in unità β).

TABELLA I.

Orto	Meta	Para	Reazioni
— 2,4506	— 2,5186	— 2,3988	nucleofile
— 2,5572	— 2,5577	— 2,5110	radicaliche
— 2,6638	— 2,5968	— 2,6232	elettrofile

Pertanto gli ordini di velocità risultano i seguenti:

per la teoria della localizzazione,

- e) $m > (p, o)$
- r) $(p, o) > m$
- n) $(p, o) > m$;

(²⁴) R. D. BROWN: *Quart. Rev.*, **6**, 63 (1952).

per il metodo della molecola isolata,

- e) $m > (o, p)$
 r) $(o, p) > m$
 n) $(p, o) > m$.

Per quanto riguarda la differenza tra la posizione meta e le posizioni orto e para troviamo completo accordo tra i due metodi e l'esperienza: la « chemical non-crossing rule » di BROWN (24) è verificata. Il comportamento relativo delle due posizioni orto e para non è ben definito nè sperimentalmente nè teoricamente: in questo caso però gli effetti sterici rendono non applicabile l'ipotesi della costanza dell'entropia di attivazione.

Tra le convenzioni di calcolo introdotte da JAFFÉ appare facilmente criticabile (24) quella relativa all'assegnazione degli integrali di Coulomb agli atomi di carbonio in posizione orto, meta e para. Abbiamo pertanto ripetuto il calcolo con l'usuale scelta dei parametri, ponendo $\alpha_c = 0$ per tutti gli atomi di carbonio eccetto quello al quale è attaccato il nitrogruppo, per il quale $\alpha_c = \alpha_N/3$.

Abbiamo ottenuto per le varie grandezze una concordanza con i dati sperimentali superiore a quella riscontrata con il calcolo precedente. Ecco i dati che interessano:

$$\begin{array}{lll} q_o = 0,9640 & q_m = 1,0025 & q_p = 0,9733 \\ \mu = 0,7425 D & \Delta E = -1,7916 & \text{E.R.} = -58,308 \text{ kcal/mole.} \end{array}$$

TABELLA II. - Energie di attivazione

Orto	Meta	Para	Reazioni
— 2,3874	— 2,4402	— 2,4064	nucleofile
— 2,5866	— 2,4402	— 2,6076	elettrofile

Poichè questo trattamento semplificato pare possa dare risultati altrettanto buoni, esso potrà essere utilmente applicato a molecole più complesse contenenti il nitrogruppo.

Complessivamente il nostro metodo ha permesso di determinare una scelta di integrali in accordo con le previsioni basate sull'elettronegatività degli atomi di azoto e ossigeno e con le caratteristiche dei legami N—O e N—C nel nitrobenzolo; l'impiego di questi parametri ha portato a valori in buon accordo con l'esperienza per tutte le grandezze prese in considerazione.

SUMMARY

A molecular orbital treatment of the nitrobenzene molecule is given: dipole moment, U.V. absorption frequency, electronic densities, bond orders, free valences, resonance energy have been calculated with a reasonable choice of the involved parameters and with good agreement with experimental data. The kinetic behavior of the molecule in all types of substitutions is also correctly predicted: the chemical non-crossing rule is verified.

Sulla cattura dei mesoni μ^- da parte dei nuclei leggeri.

A. ALBERIGI-QUARANTA e E. PANCINI

Istituti di Fisica delle Università di Roma e Genova

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Roma

(ricevuto il 5 Aprile 1954)

Riassunto. — Viene descritta una esperienza per decidere la validità della legge di Wheeler sulla dipendenza della probabilità di cattura dei mesoni μ^- da parte dei nuclei leggeri ($Z < 26$). A tale scopo è stata misurata, con un apparato descritto in un precedente lavoro, la vita media apparente dei mesoni μ^- in Al e S. Risulta in Al $\tau = 1,02 \pm 0,04 \mu\text{s}$ e in S $\tau = 0,70 \pm 0,04 \mu\text{s}$. Utilizzando questi dati, quelli ottenuti in un precedente lavoro per il C, ed un risultato ottenuto da KEUFFEL e coll. per il Fe, si conclude che la teoria di Wheeler è sufficiente a spiegare, nei limiti delle precisioni oggi raggiungibili, la dipendenza della probabilità di cattura p_c dei mesoni μ^- da parte dei nuclei con $Z < 26$. Si ricavano i valori $k = 4,4 \pm 0,3$ e $Z_0 = 11,3$ per le costanti introdotte da WHEELER nella legge $p_c = (1/\tau_0) (Z_e/Z_0)^k$.

Introduzione.

La dipendenza dal numero atomico Z della probabilità di cattura nucleare, p_c , di un mesone μ^- , che si trovi sull'orbita K di un certo atomo sembrava aver trovato soddisfacente spiegazione nella teoria di WHEELER ⁽¹⁾.

Recentemente, però, gli interessanti risultati delle misure delle probabilità della cattura dei mesoni μ^- da parte di nuclei pesanti ($Z > 30$), eseguite da KEUFFEL *et al.* ⁽²⁾, mostrano tali discrepanze con le previsioni della teoria di Wheeler da indurre a considerare opportuno un ulteriore studio sperimentale.

⁽¹⁾ J. WHEELER: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 133 (1949).

⁽²⁾ J. W. KEUFFEL, F. B. HARRISON, T. N. K. GODFREY e G. T. REYNOLDS: *Phys. Rev.*, **87**, 942 (1952).

tale del fenomeno in questione anche nel campo dei nuclei leggeri per i quali la validità della teoria è basata soltanto sui risultati delle esperienze di TICHØ ⁽³⁾.

Tali risultati infatti, a causa dei forti errori statistici dai quali sono affetti, non permettono nè di confermare il valore $k = 4$ nella formula

$$(1) \quad p_c = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{Z_0}{Z_e} \right)^k$$

(ove $\tau_0 = 2,22 \mu s$ è la vita media naturale del mesone μ , Z_e una funzione di Z calcolata da WHEELER e Z_0 una costante), nè di mettere in luce eventuali deviazioni da tale legge per alcuni nuclei di particolare struttura. Ci è sembrato perciò opportuno verificare più rigorosamente, di quanto non fosse stato fatto fino ad ora, la legge di Wheeler.

A tale scopo abbiamo eseguito misure più accurate delle vite medie apparenti τ^- dei mesoni μ negativi condotti a riposo in elementi di basso numero atomico (Carbonio, Alluminio e Zolfo). Infatti dalla conoscenza delle vite medie apparenti si può risalire subito alla probabilità di cattura per microsecondo.

1. - Apparecchio.

L'apparecchio da noi usato in questa ricerca è già stato descritto in un nostro precedente lavoro ⁽⁴⁾ a cui faremo costantemente riferimento anche per le notazioni. Durante le misure per la determinazione della vita media apparente del μ^- in Al e in S sono stati modificati, rispetto alla precedente ricerca, solamente i limiti dei gruppi di ritardi in cui vengono catalogati tutti gli eventi [(I, II, R) — AC].

Nelle misure di τ^- in Al e Fe sono stati scelti i limiti:

Gruppo	da	a
I	— 0,075 μs	+ 0,025 μs
II	+ 0,025	+ 0,175
III	+ 0,175	+ 0,35
IV	+ 0,35	+ 0,65
V	+ 0,65	+ 1,00
VI	+ 1,00	+ 1,45
VII	+ 1,45	+ 2,25
VIII	+ 2,25	+ 10

⁽³⁾ H. K. TICHØ: *Phys. Rev.*, **74**, 1337 (1948).

⁽⁴⁾ A. ALBERIGI-QUARANTA e E. PANCINI: *Nuovo Cimento*, **9**, 959 (1952).

Nelle misure di τ^- nelle S lo zero dei tempi è stato anticipato di $5 \cdot 10^{-8}$ s, lasciando immutata l'ampiezza temporale di ciascun gruppo.

Ricordiamo che l'istante dal quale si misurano i ritardi è determinato dall'arrivo del segnale dalla doppia D_x e quindi dai contatori del gruppo II. Questo segnale segue il passaggio della particella attraverso i contatori II di un tempo che include un ritardo costante e un ritardo variabile statisticamente da 0 a $0,18 \mu\text{s}$ ⁽⁵⁾. Da ciò segue che eventi fisicamente contemporanei in I, II, R possono essere registrati come eventi anticipati o ritardati a seconda del valore dei ritardi propri dei contatori II e R.

Con la scelta dei limiti dei gruppi di ritardi esposta nella tabella sopra riportata si può calcolare ⁽⁵⁾ che il rapporto tra i numeri di eventi nel I e nel II gruppo deve essere circa 0,9 nel caso delle misure con Al e 1,75 nel caso delle misure con S. La costanza di questi valori nelle singole misure è stata usata come una delle indicazioni del buon funzionamento dell'apparecchio. Altre indicazioni sul regolare funzionamento dell'apparecchio sono tratte dai dati letti sui numeratori N_a , N_R , N_d . Ogni misura parziale in cui uno qualsiasi di questi numeri differisse dal valore medio per più di quanto compatibile con le fluttuazioni statistiche è stata eliminata.

2. - Risultati sperimentali.

Con il dispositivo sperimentale già descritto sono state eseguite principalmente misure per la determinazione della vita dei mesoni μ^- nell'Al e nello S. Tali misure venivano fatte selezionando con lenti magnetiche mesoni μ^- e usando come assorbitori Alluminio metallico (densità = $2,7 \text{ g/cm}^3$) o Zolfo (densità = 2 g/cm^3) contenuto in una scatola di ottone con pareti di $0,5 \text{ mm}$. A queste venivano regolarmente intercalate misure senza assorbitore.

Sono state eseguite per controllo anche serie di misure usando come assorbitori Ferro in trucioli (densità = $1,2 \text{ g/cm}^3$) e serie di misure selezionando mesoni μ^+ .

a) *Misure senza assorbitore.* - I dati delle misure senza assorbitore sono riassunti nella tabella I.

Nel primo gruppo vengono riportati i dati, le correzioni per le casuali e i dati corretti relativi alle misure eseguite senza assorbitore, selezionando μ^- e con gli stessi limiti per i gruppi di ritardi usati per le misure con Al e Fe.

Analogamente nel II gruppo vengono riportati i dati, le correzioni per casuali e i dati corretti, relativi alle misure eseguite senza assorbitore, selezionando μ^- , e con gli stessi limiti per i gruppi di ritardo usati per le misure con S.

⁽⁵⁾ A. ALBERIGI-QUARANTA, L. MEZZETTI, E. PANCINI e G. STOPPINI: *Nuovo Cimento*, **8**, 618 (1951).

TABELLA I. -

Durata della misura	Segno	Gruppi di ritardi come con	$N_{D/h}$	$N_{R/h}$	$N_{d/h}$
294.55 h	—	Al	$56,7 \pm 0,6$	$156,7 \pm 1$	$1084 \pm$
Correzioni casuali	—	Al	—	—	—
Valori corretti	—	Al	—	—	—
105.9 h	—	S	$46,7 \pm 0,7$	$159 \pm 1,4$	$1069 \pm$
Correzioni casuali	—	S	—	—	—
Valori corretti	—	S	—	—	—
100 h	—	media	valori	corretti	—

TABELLA II. - *Mis*

Durata della misura	Segno	$N_{D/h}$	$N_{R/h}$
99.95 h	—	$62,4 \pm 0,8$	$163 \pm$
Correzione per le coincidenze casuali . .		—	—
Correzione per il fondo		—	—
Totale correzioni		—	—
Dati corretti		—	—
Dati previsti per $\tau^- = 0,2 \cdot 10^{-6}$		—	—
31.85 h	+	$71,5 \pm 1,5$	$158 \pm$
Correzione per le coincidenze casuali . .		—	—
Correzione per il fondo		—	—
Totale correzioni		—	—
Dati corretti		—	—

TABELLA III. - *Misure con asso*

Materiale	Durata della misura	Segno	$N_{D/h}$	$N_{R/h}$	$N_{d/h}$
Al	452.46 h	—	$98,9 \pm 0,5$	$163,9 \pm 0,6$	$1108,3 \pm$
Al	75.75 h	+	$111,3 \pm 1,1$	$163,5 \pm 1,5$	$1160,7 \pm$
S	514.95 h	—	$78,1 \pm 0,4$	$170,0 \pm 0,6$	$1077,2 \pm$

assorbitori.

N_I	N_{II}	N_{III}	N_{IV}	N_V	N_{VI}	N_{VII}	N_{VIII}
153	1 336	105	11	11	9	15	47
—	—	—	1	1	1,2	1,8	18
153	1 336	105	10	10	8	13,2	29
461	284	36	7	1	—	3	7
—	—	—	—	—	—	0,6	6
461	284	36	7	1	—	2,4	1
—	—	35,2	4,3	3,3	2	3,9	7,5

llo con assorbitore di Fe.

$N_{a/h}$	N_I	N_{II}	N_{III}	N_{IV}	N_V	N_{VI}	N_{VII}	N_{VIII}
$31 \pm 3,4$	399	654	78	23	11	9	5	29
—	—	—	—	—	—	—	1	9
—	—	—	33	4	3	2	4	7,5
—	—	—	33	4	3	2	5	16,5
—	—	—	35	19	8	7	—	12,5
—	—	—	35	24	4	0.8	—	—
99 ± 6	155	215	39	18	12	25	30	57
—	—	—	—	—	—	—	—	3
—	—	—	9	2	4	4	7	12
—	—	—	9	2	4	4	7	15
—	—	—	30	16	8	21	23	42

e S. Dati corretti.

	N_{II}	N_{III}	N_{IV}	N_V	N_{VI}	N_{VII}	N_{VIII}
1	3 438	185 ± 19	$197 \pm 15,4$	220 ± 16	191 ± 15	$133 \pm 13,5$	155 ± 17
2	480	47	51	53	89	72	234
2	2 066	116 ± 17	143 ± 14	121 ± 12	75 ± 10	$9 \pm 7,4$	$80 \pm 14,5$

Il cambiamento dei valori di N_D/h e N_A/h nel passare dal primo al secondo gruppo di misure, è dovuto al fatto che la pressione atmosferica media durante il periodo in cui vennero eseguite le misure appartenenti al primo gruppo era alquanto minore (circa di 1 cm di Hg) di quella che si è avuta durante le misure del secondo gruppo.

Come si vede chiaramente l'avere anticipato di $5 \cdot 10^{-8}$ s lo zero temporale, passando dal primo al secondo gruppo di misure, altera sostanzialmente soltanto le distribuzioni relative di eventi tra il I e il II gruppo di ritardi, mentre la frequenza di eventi nel III gruppo resta immutata nei due casi, come era da attendersi.

Quest'ultima osservazione dimostra che nel caso dell'Al agli eventi nel III canale non contribuiscono affatto i ritardi propri dei contatori del gruppo R. Infatti, se così fosse, lo spostamento dello zero dei tempi, e quindi del centro della curva di dispersione dei ritardi propri dei contatori, porterebbe, nel passaggio da un gruppo di misure all'altro, ad una notevole diminuzione della frequenza degli eventi nel III canale; il che non accade affatto. Accertato quindi che al III canale non contribuiscono i ritardi propri dei contatori (e se ciò è vero per le misure in Al lo sarà a maggior ragione per le misure in S) si possono senz'altro comprendere, nel caso delle misure con assorbitori, i dati relativi a questo canale nel calcolo delle vite medie.

Nelle misure senza assorbitori gli eventi relativi ai canali dal III all'VIII sono molto probabilmente dovuti a mesoni negativi (e a una piccola percentuale di positivi) disintegrantisi nei materiali di vario numero atomico costituenti il sostegno e le pareti dei contatori con una vita media apparente abbastanza breve ($\sim 1 \mu s$).

Data la differenza trascurabile che il piccolo spostamento dello zero del tempo può portare sui risultati nel passare dalla prima alla seconda serie di misure, essi vengono senz'altro sommati considerandoli come facenti parte di uno stesso gruppo di misure.

b) *Misure con assorbitori di Fe.* — Nella tabella II sono elencati i risultati di una serie di misure di controllo ottenuti usando come assorbitori due scatole contenenti Ferro in trucioli (densità = $1,2 \text{ g/cm}^3$) di sezione trapezoidale e di cm 12 di spessore pari a $14,4 \text{ g/cm}^2$.

Nelle misure con assorbitore di Fe e mesoni μ^- , il numero di N_D/h cresce, rispetto alle misure senza assorbitore, di $17 \pm 0,3/h$; questo aumento corrisponde ad un coefficiente medio di assorbimento, per i mesoni per questa regione di energia (intorno a 500 MeV), uguale a $(0,12 \pm 0,03)\%$ per g/cm^2 di Fe, in buon accordo con gli analoghi risultati da noi trovati in C, Al e S e con quanto si può dedurre dallo spettro di energia dei mesoni a 4300 m s.l.m. trovato da D. B. HALL (⁶).

(⁶) D. B. HALL: *Phys. Rev.*, **66**, 321 (1944).

I corrispondenti dati per i mesoni positivi non sono stati calcolati per la povertà della statistica.

Nella tabella II vengono elencate anche le correzioni effettuate sui dati sperimentali. Tali correzioni vengono calcolate per gli eventi registrati nel gruppo di ritardi dal terzo all'ottavo, poichè soltanto questi gruppi interessano per la determinazione della vita media τ^- .

Le correzioni effettuate sono:

1) *Correzione per coincidenze casuali*: da ogni gruppo di ritardi viene detratto il numero di coincidenze casuali calcolate.

2) *Correzione per il fondo*: da ogni gruppo di ritardi viene detratto il numero di eventi registrati nello stesso gruppo durante le misure senza assorbitore, ragguagliato allo stesso numero di ore. In questo modo si pensa di eliminare dai dati il fondo di disintegrazioni avvenute nelle pareti e nei sostegni dei contatori, fondo che è ragionevole ritenere indipendente, in prima approssimazione, dalla presenza dell'assorbitore.

Nella tabella II è anche riportata la distribuzione dei ritardi calcolata per una vita media apparente nel Fe di $0,2 \mu s$, quale può essere prevista dalla teoria di Wheeler e in buon accordo con le misure di KEUFFEL *et al.* ⁽²⁾; la normalizzazione è stata eseguita in modo da avere nel terzo gruppo un numero di eventi pari a quello sperimentale. Come si vede non vi è accordo tra il risultato previsto e quello sperimentale almeno per quanto riguarda i gruppi di ritardi VI, VII, VIII, e questa discrepanza va ovviamente attribuita alla incompleta efficienza del dispositivo nel selezionare mesoni di segno diverso.

In realtà l'efficienza delle lenti magnetiche può esser valutata con il calcolo ⁽⁷⁾ e risulta praticamente totale, mentre i dati sperimentali da noi ottenuti e riportati in tabella II sembrano mostrare che un numero di mesoni positivi, pari circa al 5% di quelli che si disintegrano nell'assorbitore con le lenti disposte per convergere mesoni positivi, si disintegrano nell'assorbitore anche quando le lenti sono disposte a selezionare mesoni negativi.

Questo fatto riscontrato anche da H. K. TICHØ ⁽³⁾ con un dispositivo analogo al nostro non è spiegabile se non ammettendo che tali mesoni positivi si arrestino nell'assorbitore senza avere attraversato entrambi i contatori del telescopio (I, II), e siano però associati a particelle che azionano almeno uno dei contatori I e II. In tale modo essi non risentono dell'azione delle lenti magnetiche, ma possono dare luogo ugualmente ad eventi $[(I, II, R) - AC]$ che vengono quindi esaminati dal misuratore di ritardi T .

Questa ipotesi è anche confermata dal fatto che H. K. TICHØ trova per la frazione dei mesoni positivi incidenti non eliminata dalle lenti magnetiche, un valore del 4%, assai vicino a quello da noi trovato, mentre la geometria

⁽⁷⁾ M. CONVERSI, E. PANCINI e O. PICCIONI: *Nuovo Cimento*, **3**, 372 (1946).

del suo dispositivo, alquanto diversa dalla nostra (uguale lente magnetica, uguale campo, ma angolo solido del telescopio assai più stretto del nostro), indurrebbe ad attendere una disparità assai maggiore.

3) *Misure con assorbitore di Al.* — Nella tabella III sono elencati i risultati ottenuti usando come assorbitori due blocchi di alluminio (densità $2,7 \text{ g/cm}^3$) di sezione trapezoidale e di cm 12 di spessore, equivalente a 32 g/cm^2 . Nelle misure con assorbitore il numero di N_d/h cresce, rispetto alle misure senza assorbitore, di $(47,5 \pm 1,7)/h$ per i mesoni positivi e di $(42,2 \pm 0,8)/h$ per i mesoni negativi. Questo corrisponde a un coefficiente medio di assorbimento per i mesoni in Al uguale a $(0,16 \pm 0,01)\%$ per g/cm^2 di Al per i positivi e a $(0,12 \pm 0,002)\%$ per g/cm^2 per i negativi.

Notiamo inoltre che gli incrementi di N_d/h che si riscontrano passando dalle misure senza assorbitori a quelle con assorbitori di Al, e che sono dovuti ai mesoni incidenti nei telescopi (I, II) che vengono condotti a riposo negli assorbitori, presentano un eccesso positivo (*) del $(11,8 \pm 4,2)\%$. Considerando invece gli eventi registrati nei gruppi di ritardi dal terzo all'ottavo dovuti a mesoni disintegrati nell'assorbitore, si può valutare (tenuto conto della probabilità di cattura dei μ^- e della diversa vita media dei μ^+ e dei μ^-) che per i mesoni condotti a riposo negli assorbitori si ha un eccesso positivo del $(20,7 \pm 5,8)\%$, non incompatibile con il valore trovato con le N_d/h .

I dati della tabella III sono dedotti dai risultati sperimentali effettuando le stesse correzioni che nel caso del Fe ed inoltre è stato tenuto conto, per i mesoni negativi, anche della correzione per l'incompleta selezione operata dal dispositivo. Abbiamo infatti calcolato, assumendo $\tau^+ = 2,22 \mu\text{s}$, il numero di eventi per ciascun gruppo dovuti a disintegrazione di questi mesoni positivi (5% del numero di μ^+ incidenti nell'angolo solido del telescopio) sfuggiti alla selezione delle lenti, e lo abbiamo detratto dal numero totale di eventi registrati in quel canale.

Per il calcolo della vita media, non essendo applicabile nel nostro caso il metodo di Peierls (8) abbiamo usato le ben note formule

$$(2) \quad \tau = \frac{l}{\log r}, \quad \frac{\overline{\delta\tau^2}}{\tau^2} = \frac{\tau^2}{t^2} \left[\left(\frac{\delta N}{N} \right)^2 + \left(\frac{\delta N_t}{N_t} \right)^2 \right],$$

dove r è il rapporto fra il numero totale N di eventi ritardati dopo il tempo t_0 e il numero N_t di eventi ritardati dopo il tempo t .

(*) Nel presente lavoro si intende con l'espressione eccesso positivo, la quantità

$$2 \frac{N^+ - N^-}{N^+ + N^-} \cdot 100.$$

(8) R. PEIERLS: *Proc. Roy. Soc.*, A **149**, 467 (1937).

Dai nostri dati è possibile ottenere cinque valori indipendenti della vita media apparente del mesone μ^- :

$$0,93 \pm 0,26, \quad 1,09 \pm 0,14, \quad 1,01 \pm 0,08, \quad 0,96 \pm 0,06, \quad 1,07 \pm 0,06$$

da cui si ritrova per la vita media il valore

$$\tau_{M} = 1,02 \pm 0,04 \text{ } \mu\text{s}.$$

4) *Misure con assorbitori di S.* — Nella tabella III sono elencati i risultati ottenuti usando come assorbitori due blocchi di Zolfo (densità 2 g/cm^3) di sezione trapezoidale e di cm 12 di spessore equivalente a 24 g/cm^2 .

Nelle misure con assorbitore il numero di N_d/h cresce, rispetto alle misure senza assorbitore, di $(31,4 \pm 0,8)/h$ per i mesoni negativi. Questo corrisponde ad un coefficiente medio di assorbimento per i mesoni in S uguale a $(0,12 \pm 0,004)\%$ per g/cm^2 di S.

Usando le formule (2) si ottengono per la vita media i cinque valori indipendenti:

$$0,73 \pm 0,25, \quad 0,73 \pm 0,11, \quad 0,69 \pm 0,07, \quad 0,70 \pm 0,07, \quad 1,08 \pm 0,1$$

come si vede l'ultimo di questi valori sembra scartare in maniera normale rispetto alla media pesata di essi che risulta $0,76 \pm 0,04$.

Dall'esame dei dati sperimentali e il confronto con le misure senza assorbitori che sono state regolarmente alternate a quelle con assorbitori di S si può concludere che:

a) gli eventi registrati nell'ottavo gruppo durante le misure con assorbitore di S sono regolarmente distribuiti nel tempo;

b) le misure senza assorbitore danno per l'ottavo gruppo il numero di eventi prevedibile in base a tutte le altre misure.

Ciò indurrebbe a concludere che il numero anormale di eventi registrati, nel caso dello S, nell'ottavo gruppo non sia imputabile ad un effetto strumentale.

Le interpretazioni di questo effetto, se reale, possono essere diverse. Nell'attesa di indagare più a fondo il fenomeno dei mesoni μ^- in S con un nuovo dispositivo sperimentale, ci limiteremo ad assumere come valore più attendibile per τ_s^- in S

$$\tau_s^- = 0,70 \pm 0,04 \text{ } \mu\text{s},$$

che si può ottenere facendo la media pesata dei primi quattro valori sopra elencati.

3. — Conclusioni.

Nella seguente tabella sono riportati i valori delle vite medie apparenti τ^- e della probabilità di cattura per microsecondo p_c quali si possono desumere, dai risultati delle nostre misure.

Insieme ai risultati da noi ottenuti per C ⁽¹⁾, Al, S, sono stati elencati quelli relativi al Fe ottenuti da J. W. KEUFFEL *et al* ⁽²⁾.

Autori	Elemento	Z_e	τ^-	p_c
Noi	Al	5,78	$2,18 \pm 0,07$	$0,01 \pm 0,01$
»	C	11,58	$1,02 \pm 0,04$	$0,53 \pm 0,04$
»	S	13,7	$0,70 \pm 0,04$	$0,97 \pm 0,06$
KEUFFEL	Fe	19,4	$0,16 \pm 0,03$	$5,8 \pm 1,3$

L'esame di questa tabella mostra anche con determinazioni alquanto accurate (almeno per misure eseguite con le piccole intensità dell'esperienze sui mesoni μ della radiazione cosmica) dei valori di τ^- i valori della p_c siano affetti da errori che per i piccoli numeri atomici raggiungono il 100%. Si deve inoltre considerare che per la forma della dipendenza di k e Z_0 da p_c , l'entità degli errori relativi a queste ultime grandezze diventa in questo caso tale da non rendere più sicuramente applicabili quei risultati della teoria degli errori che sono validi quando gli errori sono piccoli rispetto alle grandezze cui si riferiscono.

Ciò nonostante abbiamo creduto opportuno calcolare i valori di k e Z_0 applicando il metodo dei minimi quadrati non dimenticando per altro che i valori così ottenuti possono non essere la migliore determinazione di tali grandezze.

Utilizzando solo i nostri dati abbiamo ottenuto

$$k = 3,8 \pm 0,5, \quad Z_0 = 11,1 \quad (\lg Z_0 = 1,045 \pm 0,2)$$

e tenendo conto insieme ai nostri risultati di quello di KEUFFEL relativo al Fe, abbiamo ottenuto

$$k = 4,4 \pm 0,3, \quad Z_0 = 11,3 \quad (\lg Z_0 = 1,054 \pm 0,2).$$

Si noti che la forte variazione tra i due valori di k è in gran parte dovuta

alla piccola variazione del valore di Z_0 . Infatti si ha dalla (1)

$$dk = \frac{k^2}{Z_0 \log \frac{\tau_0 - \tau^-}{\tau^-}} dZ_0,$$

dalla quale si vede che se $Z_0 \simeq Z_e$, cioè per $(\tau_0 - \tau^-)/\tau^-$ prossimo ad 1 (che è il caso della nostra misura dotata di maggior peso) il coefficiente di dZ_0 diventa maggiore di 10.

Date le grandi difficoltà di ottenere con i mesoni della radiazione cosmica dei valori della probabilità di cattura da parte di nuclei leggeri molto più precisi di quelli da noi riportati è prevedibile che la legge di dipendenza di queste probabilità da Z e la correttezza dei valori di Z_e calcolati da WHEELER non potrà essere controllata con precisione molto maggiore di quella ottenuta nella presente ricerca almeno finchè non potranno essere utilizzati fasci di mesoni μ artificiali.

Si può dunque concludere che la teoria di Wheeler della cattura dei mesoni μ^- da parte dei nuclei leggeri è sufficiente per spiegare, nel limite delle precisioni oggi raggiungibili nelle esperienze sui raggi cosmici, la dipendenza della vita media apparente dei mesoni τ^- dal numero atomico, assumendo per le costanti Z_0 e k i valori 11 e 4 per i valori di Z non superiori a $Z = 26$.

SUMMARY

An experiment is described to test the validity of Wheeler's law for the Z -dependence of the probability of capture of negative μ -mesons by light nuclei ($Z \leq 26$). With an apparatus described in a preceeding paper the apparent mean life of the μ -mesons τ^- has been measured in Al and S, with the result $\tau^- = 1.02 \pm 0.04$ in Al and $\tau^- = 0.70 \pm 0.04$ in S. Using these values, those obtained previously for C, and a value obtained by KEUFFEL *et al.* for Fe, it is concluded that Wheeler's theory is sufficient to explain, within the limits of accuracy at present attainable, the dependence on Z of the capture probability p_c in light nuclei ($Z \leq 26$). The values $k = 4.4 \pm 0.3$ and $Z_0 = 11.3$ are found for the constants introduced by WHEELER in the law $p_c = (1/\tau_0)(Z_e/Z_0)^k$.

High Polarization of Nuclei in Paramagnetic Substances.

P. BROVETTO and G. CINI

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Torino

(ricevuto il 6 Aprile 1954)

Summary. — In this paper a thermodynamical treatment of nuclear polarization in paramagnetic solids is developed. The general validity of the results obtained by A. W. OVERHAUSER for alkali metals, is confirmed. We find that it is possible to achieve a degree of nuclear polarization equal to the one obtainable with the same magnetic field and temperature for electrons.

1. — Introduction.

A new method for producing polarization of nuclear spins in a metallic solid has been proposed recently by A. W. OVERHAUSER ⁽¹⁾.

This method is based on the effect produced by paramagnetic relaxation processes, due to coupling of electronic and nuclear spins ⁽²⁾: more exactly one considers the nuclear relaxation process in a metal placed in a static magnetic field, which tends to restore the system of electronic spins, excited by the photons of a strong microwave source, to its equilibrium state, while inducing nuclear polarization. This polarization is calculated dynamically considering the evolution of the system towards the equilibrium state, viz. employing the knowledge of relaxation times. However, the polarization in the equilibrium state is found to depend only upon the values of the static magnetic field and of the temperature, and upon the degree to which the electron resonance can be saturated, hence not upon the nuclear relaxation time.

In this work a very simple thermodynamical treatment of the problem is

⁽¹⁾ A. W. OVERHAUSER: *Phys. Rev.*, **92**, 411 (1953).

⁽²⁾ A. W. OVERHAUSER: *Phys. Rev.*, **89**, 689 (1953).

developed, which enables us to obtain directly the results of A. W. OVERHAUSER, extending their validity.

2. - Thermodynamical treatment of the nuclear polarization.

A number of relaxation processes brings to the equilibrium condition the difference of the population between the Zeeman levels of the electrons. The relaxation process due to the interaction between electrons and nuclei, depends upon the operator ⁽³⁾:

$$\mathcal{H} = \frac{8\pi}{3} \beta_e \beta_n (2\sigma_{n+}\sigma_{e-} + 2\sigma_{n-}\sigma_{e+} + \sigma_{nz}\sigma_{ez}) \delta(r),$$

where β_e is the electronic magnetic moment, β_n is the ratio between the nuclear magnetic moment and twice the nuclear spin I , σ_e , σ_n are the Pauli spin operators for the electron and for the nucleus, and $\delta(r)$ is the Dirac function of the distance between electron and nucleus. The first term of such an operator is responsible for transitions of the type:

$$(1) \quad e_{+\frac{1}{2}} + n_{m-1} \rightarrow e_{-\frac{1}{2}} + n_m$$

and the second term for the transition:

$$(2) \quad e_{-\frac{1}{2}} + n_m \rightarrow e_{+\frac{1}{2}} + n_{m-1},$$

while the third term does not produce similar effects.

We have denoted in (1) and (2), by $e_{+\frac{1}{2}}$ and $e_{-\frac{1}{2}}$ the electrons with components of the spin momentum respectively parallel and antiparallel to the static magnetic field, and analogously by n_m the nucleus with component m of the spin momentum I in the direction of the field.

Let us call: $N_{+\frac{1}{2}}$, $N_{-\frac{1}{2}}$ and N respectively the number of electrons $e_{+\frac{1}{2}}$, $e_{-\frac{1}{2}}$ and the total number of electrons, M_m and M respectively the number of nuclei n_m and the total number of nuclei, that is to say:

$$(3) \quad N_{+\frac{1}{2}} + N_{-\frac{1}{2}} = N,$$

$$(4) \quad \sum_{-I}^I M_m = M.$$

When the equilibrium between processes (1) and (2) is achieved, from the

⁽³⁾ E. FERMI: *Zeits. f. Phys.*, **60**, 320 (1930).

law of mass action we have (*):

$$(5) \quad \frac{N_{-\frac{1}{2}} M_m}{N_{+\frac{1}{2}} M_{m-1}} = K_c,$$

where K_c is obtainable by integration of the Van't Hoff equation:

$$(6) \quad \frac{d \log K_c}{dT} = \frac{\Delta U}{RT^2}.$$

ΔU is the heat-content at constant volume, that is the variation of the internal energy of the system, during the process (1). Therefore we have:

$$(7) \quad [e_{+\frac{1}{2}}] + [n_{m-1}] = [e_{-\frac{1}{2}}] + [n_m] - \Delta U,$$

where the square brackets mean the internal energy of electrons and nuclei. From (7) it follows, remembering that β_e, β_n have opposite signs, that:

$$\Delta U = -2H(\beta_n + |\beta_e|)\mathcal{N},$$

where H is the static magnetic field, \mathcal{N} Avogadro's number.

Introducing the gyromagnetic ratio $\gamma = 2\beta/\hbar$, the variation of the internal energy becomes:

$$(8) \quad \Delta U = -(\gamma_n + |\gamma_e|)\hbar H \mathcal{N}.$$

We determine the constant of integration in (6) by means of the conditions that at very high temperature we must have:

$$N_{-\frac{1}{2}} = N_{+\frac{1}{2}}, \quad M_m = M_{m-1}.$$

From (5), (6) and (8) we then find:

$$(9) \quad \frac{N_{-\frac{1}{2}} M_m}{N_{+\frac{1}{2}} M_{m-1}} = \exp \left[\frac{\gamma_n + |\gamma_e|}{kT} \hbar H \right].$$

(*) It is possible to obtain in statistical way the explicit expression of the mass action law (5) by assuming that the sums of the potentials of nuclei and electrons appearing in both sides of equation (1), expressed by means of their partition function, are equal. We have, in the Boltzmann quantum statistics, $\mu = kT \log(N/f(T))$ where μ is the chemical potential and $f(T)$ the partition function. However we feel that the thermodynamical considerations introduced here to evaluate K_c have a more direct physical interpretation.

Without microwaves, processes (1) and (2) cannot change the internal energy of the spin systems of electrons and nuclei, and so cannot modify the ratios of populations of electronic and nuclear spin levels in any way. These populations are due to the two independent conditions of the equilibrium:

$$(10) \quad e_{+\frac{1}{2}} \rightleftharpoons e_{-\frac{1}{2}}, \quad n_{m-1} \rightleftharpoons n_m, \quad \text{viz:} \\ \frac{N_{-\frac{1}{2}}^0}{N_{+\frac{1}{2}}^0} = \exp \left[\frac{|\gamma_e| \hbar H}{kT} \right], \quad \frac{M_m^0}{M_{m-1}^0} = \exp \left[\frac{\gamma_n}{kT} \hbar H \right].$$

If the system is strongly irradiated by microwaves with frequency $\omega = 2|\beta_e|H/\hbar$, the transitions $e_{-\frac{1}{2}} + \hbar\omega \rightarrow e_{+\frac{1}{2}}$ will increase the population of the level $+1/2$ and consequently a great number of transitions (1) occurs, inducing nuclear polarization. In other words, having reduced by means of the microwaves the ratio $N_{-\frac{1}{2}}/N_{+\frac{1}{2}}$, when the equilibrium state is restored, the ratio M_m/M_{m-1} is found to be increased, as one can see by equation (9).

Let us define:

$$(11) \quad \frac{N_{-\frac{1}{2}}}{N_{+\frac{1}{2}}} = \exp [\delta],$$

where $N_{-\frac{1}{2}}$, $N_{+\frac{1}{2}}$ are the populations of the electronic spin levels when the alternating field of microwaves is turned on. At the saturation of paramagnetic resonance we shall have $N_{-\frac{1}{2}} = N_{+\frac{1}{2}}$ and $\delta = 0$.

Let us define, following OVERHAUSER a parameter of saturation s :

$$(12) \quad s = 1 - \frac{N_{-\frac{1}{2}} - N_{+\frac{1}{2}}}{N_{-\frac{1}{2}}^0 - N_{+\frac{1}{2}}^0},$$

which is 0 when there is no alternating field and is 1 for complete saturation. The relation between s and δ follows from (3), (10), (11), (12):

$$\operatorname{tgh} \frac{\delta}{2} = (1 - s) \operatorname{tgh} \frac{|\gamma_e| \hbar H}{2kT}.$$

As the most interesting feature of the phenomenon arises when s approaches 1, we make the following approximation:

$$(13) \quad \delta = (1 - s) \frac{|\gamma_e| \hbar H}{kT}.$$

With the use of (13) and (11), (9) becomes:

$$(14) \quad \frac{M_m}{M_{m-1}} = \exp [\mu], \quad \mu = \frac{\gamma_n + s|\gamma_e|}{kT} \hbar H.$$

The value of the ratio M_m/M_{m-1} when $s = 1$, given by (14), is obtained as an exact result from (9).

Let us define the nuclear polarization P in this way:

$$P = \frac{1}{IM} \sum_{-I}^I m M_m.$$

By means of (4) and (14) the polarization becomes:

$$(15) \quad P = \frac{\sum_{-I}^I m \exp [m\mu]}{I \sum_{-I}^I \exp [m\mu]}$$

and therefore is given by the Brillouin function:

$$(16) \quad P = \frac{2I+1}{2I} \operatorname{cotgh} \frac{2I+1}{2} \mu - \frac{1}{2I} \operatorname{cotgh} \frac{\mu}{2}.$$

This expression for P means that the polarization of nuclei, when the saturation is s , for given values of static field and temperature, is the same as the polarization of a system of electrons would be, under the same conditions, if their gyromagnetic ratio were $\gamma_n + s|\gamma_e|$.

For small values of μ , viz. high temperature and low static field, (16) becomes:

$$P = (1+I) \frac{\gamma_n + s|\gamma_e|}{3kT} \hbar H.$$

For $I = 1/2$ (16) can be written:

$$(17) \quad P = \operatorname{tgh} \frac{\gamma_n + s|\gamma_e|}{2kT} \hbar H.$$

The equations (16) and (17) express in a more complete form the same results obtained by OVERHAUSER ⁽¹⁾, as our formula (15) is formula (15) of his work.

In Fig. 1 is plotted the value of P versus T , calculated for a nucleus of spin $1/2$ by means of (17) with $s = 0.9$, for different values of H and therefore for different values of the wave length of microwaves (*).

(*) The curves of Fig. 1 are valid for any nucleus with spin $1/2$, because in every case $\gamma_n \ll \gamma_e$.

3. - Conclusion.

The curves of Fig. 1 show that it is possible to obtain nearly total nuclear polarization at temperatures below 1 °K with centimeter waves, when the parameter s approaches unity.

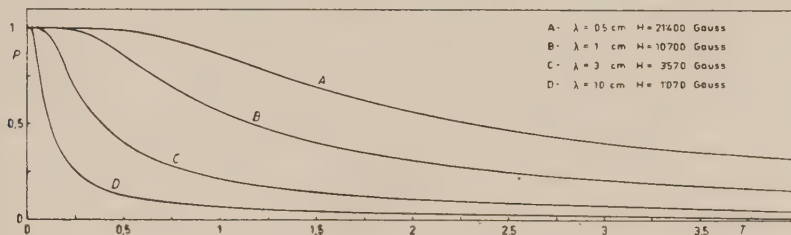


Fig. 1. - Value of P calculated for a nucleus of spin $1/2$.

Having evaluated without paramagnetic saturation the polarization of protons in a field of 21400 Gauss, at 0.5 °K, we find that under the same conditions of magnetic field and temperature, the polarization may be increased in this case by a factor of 230.

Generally at temperatures of the order of 1 °K electronic relaxation times are quite long so that saturation may be achieved.

For instance in the alkali metals saturation must be obtainable as the calculation of A. W. OVERHAUSER ⁽²⁾ predict values of 10^{-6} for the relaxation times already at room temperature. In metallic solids in order to avoid eddy current losses, it would be necessary to use finely divided metallic samples of particle size somewhat smaller than the depth of the skin-effect at low temperature, viz. smaller than a micron ⁽⁴⁾.

We can conclude that the experimental conditions, under which the total nuclear polarization is predicted by (16), must be realizable at least in some cases, because they are the same conditions, apart from the paramagnetic saturation, encountered in the classical experiments of electron polarization ⁽⁵⁾.

However even at room temperature and in a static field of 30 gauss the effect of nuclear polarization by means of this method, has been qualitatively checked ⁽⁶⁾.

The effect has been shown by nuclear resonance, the intensity of which is proportional to the degree of nuclear alignment.

⁽⁴⁾ T. W. GRISWOLD, A. F. KIP and C. KITTEL: *Phys. Rev.*, **88**, 951 (1952).

⁽⁵⁾ H. R. WOLTJER and H. K. ONNES: *Comm. Phys. Lab. Leiden*, no. 167c (1923).

⁽⁶⁾ T. R. CARVER and C. P. SLICHTER: *Phys. Rev.*, **92**, 212 (1953).

The achievement of high nuclear polarization is obviously very important for performing nuclear scattering experiments.

Only the alkali metals, in which electrons are distributed as in a Fermi gas, have been considered in Overhauser's calculations. Our results are not based on any particular model for describing the electrons system, therefore it is possible to conclude that the nuclear polarization effect occurs in any paramagnetic substance. The reason is that the polarization is determined only by the fact that the heat-content of process (1) is positive and that of process (2) is strongly negative (*).

Nothing instead we can tell, with thermodynamical ideas about the nuclear relaxation time which determines the velocity by means of which equilibrium is reached. We can however observe that in the case of paramagnetic non-metals, the process (1) requires a higher activation energy than the one required for metals. This is because in the case of a metal a conduction electron in an unfilled band can always increase its kinetic energy by an amount equal to the magnetic energy lost in the transition (1); in a non-metal instead, where for the electrons only discrete energy states are available, transition (1) occurs only when an energy is supplied to the electron-nucleus system in addition to that one released in the inversion of the magnetic moments so that the electron nucleus-system can jump to the next higher level. Obviously also the activation energy of the process (2) is increased by the same amount, so that the equilibrium constant of equation (5), and therefore the equilibrium state of nuclear polarization, remains always unchanged and not dependent on the type of solid.

However the time to arrive to the equilibrium obviously depends on the type of solid, namely in non-metallic compounds this time must be much longer.

The possibility of obtaining high nuclear polarization in non-metals is probably conditioned by the fact that other nuclear relaxation processes do not short-circuit the alignment partially; some difficulties may arise in obtaining paramagnetic saturation as electronic relaxation times are in some cases very short.

In a future work this problem will be treated by means of statistical mechanics methods.

(*) One must consider only the heat-content of process (1), because in it the entropy of the system does not change. This appears from Boltzmann's theorem, as the thermodynamic probability of the distribution of a certain number of electrons and nuclei with given spin components is found to be independent from the values of these components.

We are grateful to Prof. M. CINI for many helpful discussions and to Prof. A. GAMBA for his interest in this work.

RIASSUNTO

In questo lavoro si studia dal punto di vista termodinamico la polarizzazione nucleare in solidi paramagnetici. Si prova la generale validità dei risultati ottenuti da A. W. OVERHAUSER per i metalli alcalini. Si trova che è possibile raggiungere polarizzazioni nucleari pari a quelle elettroniche nelle stesse condizioni di campo magnetico e temperatura.

Mouvement parasite vertical d'une suspension élastique symétrique à compensation et asservissement.

J. E. PLAINEVAUX

Université Libre de Bruxelles

(ricevuto l'8 Aprile 1954)

Résumé. — Après un bref historique des dispositifs proposés pour la réalisation d'un guidage rectiligne sur lames élastiques, l'auteur expose une méthode approchée de calcul des suspensions symétriques et symétriquement chargées, du type à asservissement. La méthode, valable pour des suspensions dont les lames sont de longueurs identiques, utilise les relations de Navier-Bresse, linéarisant ainsi le problème. La méthode suppose donc de faibles charges de platine et de cadre raidisseur. Les formules sont données pour les deux cas principaux: lames élastiques sur toute leur hauteur et lames symétriques raidies dans leur partie centrale.

Dans un précédent travail ⁽¹⁾ nous avons décrit une méthode générale de calcul du mouvement parasite de dispositifs symétriques de guidage sur lames élastiques.

Cette méthode s'applique aux montages dits à compensation qui utilisent la combinaison d'un montage en U et d'un montage en U renversé. Nous avons attiré l'attention sur le fait que dans le cas de dispositifs à compensation la précision des calculs intermédiaires devait être fort poussée pour obtenir une précision acceptable dans le résultat final. Cette nécessité résulte de ce que les déplacements verticaux sont obtenus par la différence de valeurs très voisines. De plus ces calculs doivent être effectués au moyen de tables de fonctions elliptiques dont la précision est limitée en pratique. L'exécution de ces calculs est aussi assez longue. C'est pourquoi ils rebutent souvent ceux qui ont à les faire.

⁽¹⁾ J. E. PLAINEVAUX: *Nuovo Cimento*, **10**, 1451 (1953).

En présence de ces différents faits, il nous a semblé utile de chercher une autre voie d'attaque du problème du mouvement parasite vertical. La méthode que nous présentons ici se limite au cas signalé à la fin de la note précitée: celui des systèmes à compensation où les déplacements du cadre raidisseur sont astreints à être deux fois plus petits que ceux de la platine du microscope (systèmes à asservissement) et où les lames de la suspension en U sont de la même longueur que celles de la suspension en U renversé.

Les dispositifs compensés, où les déplacements respectifs du cadre raidisseur et de la platine résultent de l'équilibre statique des lames déformées, sont fort anciens. Il n'en est pas de même du dispositif à asservissement géométrique des déplacements.

Parmi les dispositifs compensés décrits depuis fort longtemps citons le type proposé par CLAY dans son adresse présidentielle à la Société Royale de Microscopie de Grande Bretagne, intitulée: *The mechanical development of the microscope* ⁽²⁾ et en particulier le paragraphe: « A straight-line motion made with springs ».

Citons aussi un article récent de JONES ⁽³⁾ intéressant à divers points de vue. Cet article compare plusieurs dispositifs. Il attire l'attention sur les variations des erreurs par rapport à la ligne droite; variations dues à la non identité des lames. A ce propos il décrit un dispositif aussi simple qu'élégant permettant une égalisation des lames. Cet article confirme ce que nous pensons depuis longtemps: s'il est vrai que les suspensions à lames sont de réalisation économique et ne nécessitent pas de machines-outils de haute précision pour leur fabrication, il n'en est pas moins vrai que le réglage de ces lames est long et pénible, et nécessite un personnel hautement qualifié et adroit si l'on souhaite obtenir une suspension de haute qualité.

La solution consistant à asservir les déplacements de la platine à ceux du cadre raidisseur semble intéressante à plusieurs points de vue. Si les lames sont remplacées par des bielles articulées à leurs extrémités, le déplacement de la platine est rigoureusement rectiligne si les articulations et le dispositif de duplication sont parfaits. Une erreur dans le dispositif de duplication des déplacements n'influence, comme nous l'avons montré, que faiblement le mouvement vertical de la platine. Enfin, un tel dispositif est insensible à un chargement dissymétrique de la platine. Pour éviter les inconvénients inhérents aux articulations d'extrémités des bielles, on est conduit à remplacer les paliers par des articulations sur ressorts. Ces articulations se réalisent le plus simplement lorsqu'elles sont exécutées sous la forme d'une simple lame courte: d'où la réalisation de la bielle sous forme d'une lame de ressort raidie dans sa partie centrale. Enfin de toutes les exécutions possibles, la plus simple est

⁽²⁾ R. S. CLAY: *Journ. Roy. Micr. Soc.* (March 1937).

⁽³⁾ R. V. JONES: *Journ. Sci. Instr.*, **28**, 38 (1951).

celle où la lame de ressort n'est pas rigide en sa partie médiane. Notre étude portera sur les deux derniers cas: lame élastique travaillant en flexion sur toute sa hauteur et lame élastique rendue rigide dans sa partie centrale.

Remarquons qu'au cours des simplifications de construction que nous venons d'énumérer nous ne nous sommes pas préoccupés de savoir si les avantages de la suspension à asservissement se conservaient. Aussi est-ce bien un peu sentimentalement que l'on réclame des avantages pour cette suspension. Nous étudierons cette question de plus près dans une note ultérieure. Bornons-nous à dire ici que cette note montrera que la suspension à asservissement présente des avantages indéniables sur la suspension non asservie.

Disons encore ici que les dispositifs à asservissement sont plus faciles à étudier théoriquement. Cette simplification théorique résulte de ce que les lames de la suspension sont étudiables séparément, ce qui n'est pas le cas des suspensions non asservies.

Signalons aussi que, à égalité de rigidité de suspension, l'effort subi par la vis est sensiblement le même quel que soit le type de suspension. Cet effort est d'ailleurs essentiellement variable avec la position de la platine et change de sens au passage de cette dernière par la position moyenne. Il faut reconnaître que cet effort variable est particulièrement gênant, d'autant plus que l'on a tendance à augmenter la rigidité pour réduire l'importance du mouvement parasite dans le plan vertical. On est loin de travailler à pression faible et constante sur la vis comme il serait souhaitable de le faire. A notre connaissance il n'a pas encore été trouvé de solution satisfaisante à ce problème

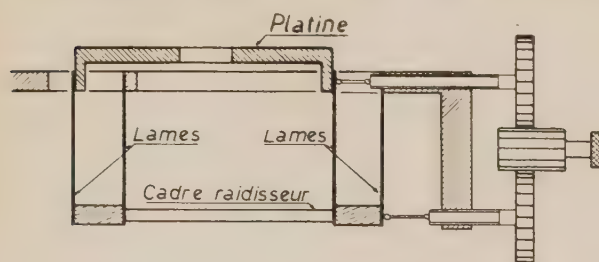


Fig. 1.

très important pour la longévité de la précision de la vis ainsi que pour la précision du guidage fourni par la suspension.

Considérons (fig. 1), un dispositif à asservissement à lames alternées et où l'asservissement est obtenu, pour fixer les idées, par deux vis dont les pas sont

dans le rapport de un à deux. Déplaçons la platine à partir de sa position médiane d'une longueur $2x_1$. Chaque lame de suspension présente alors une flèche horizontale x_1 , les tangentes aux extrémités de la lame restant verticales. Pour calculer le mouvement parasite dans le plan vertical, calculons les déformations en deux étapes.

Supposons d'abord toutes les forces verticales nulles et déformons les lames comme il vient d'être dit. Pour obtenir cette déformation (fig. 2) nous devons introduire aux extrémités deux forces F_0 égales et de signes contraires et deux

moments d'encastrement M_0 égaux et de sens opposés. Dans cette déformation les lames se sont raccourcies dans le sens vertical d'une certaine quantité qui nous est indifférente puisque la platine n'est pas descendue par rapport au bâti dans cette déformation.

Étudions une lame déformée (fig. 2). Nous supposons que les déformations sont dues uniquement au moment fléchissant. Admettons l'hypothèse des petites déformations, habituelle en résistance des matériaux. On assimile donc la courbure de la lame déformée à la dérivée seconde de la flèche par rapport à l'axe de la pièce non déformée. L'arc de lame déformée est alors assimilé à sa projection sur l'axe Oz . Pour ce calcul, la lame ne se raccourcit donc pas suivant son axe non déformé Oz . Comme nous l'avons déjà dit plus haut, ce raccourcissement ne présente pas d'intérêt dans le cas qui nous occupe car il n'influence pas le mouvement vertical de la platine grâce à la compensation du système de suspension.

Tenant compte que $M_0 = \frac{1}{2} F_0 L$, l'équation différentielle de la courbe déformée est :

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{F_0}{EI} \left(\frac{1}{2} L - z \right).$$

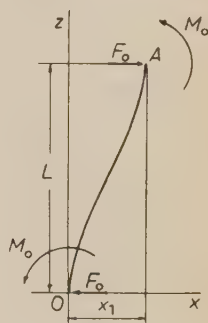


Fig. 2.

I étant le moment d'inertie géométrique de la lame par rapport à sa fibre neutre, et E le module d'élasticité du matériau dont la lame est faite. Au besoin, dans cette équation ainsi que dans les équations suivantes, il faudra remplacer E par le module réduit $E' = E(1 - \nu^2)$, ν étant le coefficient de Poisson.

Tenant compte des conditions aux limites :

$$\text{en } O : \quad z = 0, \quad x = 0, \quad \frac{dx}{dz} = 0,$$

$$\text{en } A : \quad z = L, \quad \frac{dx}{dz} = 0,$$

il vient, tous calculs effectués :

$$(1) \quad x = \frac{F_0}{2EI} z^2 \left(\frac{1}{2} L - \frac{1}{3} z \right).$$

Appelons x_1 la flèche horizontale à l'extrémité A , on en déduit :

$$(2) \quad x_1 = \frac{F_0}{EI} \frac{L^3}{12}.$$

L'élimination du terme F_0/EI entre les équations (1) et (2) nous donne l'équa-

tion de la lame déformée en fonction de sa flèche maximum x_1 :

$$(3) \quad x = \frac{6x_1}{L^3} z^2 \left(\frac{1}{2} L - \frac{1}{3} z \right).$$

C'est cette équation que nous utiliserons dans la suite des calculs. Remarquons en passant que la déformée de la lame est indépendante de sa rigidité.

C'est à partir de la connaissance de cette déformée que nous allons calculer l'abaissement de la platine et du cadre raidisseur lorsque des forces verticales sont présentes. Nous nous bornerons à calculer des suspensions symétriques et symétriquement chargées. Étudions d'abord le rapprochement de la platine du cadre raidisseur.

Nous calculerons ce rapprochement en utilisant une idée de NAVIER relative au principe de la superposition des petites déformations. Il est bien évident que dans le cas qui nous occupe, ce principe ne s'applique pas en toute rigueur et qu'il faudrait calculer les déformations avec toutes les forces en présence. Mais comme nous l'avons montré, ce calcul se heurte à certaines difficultés.

Pour calculer la suspension en question avec l'idée de Navier, considérons que la déformée (équation (3)) sous l'action des charges horizontales est la forme d'une lame à l'état neutre, c'est-à-dire que la déformée que nous avons déterminée est une courbe géométrique et que nous ne nous préoccupons pas des forces et couples qu'il a été nécessaire de lui appliquer pour l'obtenir.

Supposons donc qu'à cette lame « initialement » courbe, nous appliquions les forces verticale P et horizontale Q ainsi que des moments d'encastrement destinés à maintenir les extrémités verticales. Sous l'influence des moments fléchissants ainsi créés, tous les éléments de la courbe se déforment. Le problème du déplacement de chaque point est généralement inextricable, puisque la déformation de chaque élément modifie la position et la direction des autres éléments; or, c'est à partir de cette position et de cette direction que nous calculons les déplacements. Au contraire, le problème est simple et se ramène à des quadratures, si nous calculons les déplacements dus à la déformation d'un élément avec les moments calculés *comme si l'élément en question restait dans sa position initiale*. Sans nous occuper du déplacement que subit un élément, nous déterminons ce qui résulte de sa flexion pour le déplacement du point considéré. Nous additionnons tous les déplacements ainsi calculés; autrement dit, nous prenons pour bras de levier définitifs, les bras de levier avant la déformation. Ce n'est légitime que si les déplacements sont petits.

Ce procédé de calcul est en fait une linéarisation du problème. Il n'est donc acceptable que si les charges verticales n'ont qu'une faible influence sur les flèches, ou d'une manière un peu plus précise, si les charges verticales sont petites par rapport à la charge critique d'Euler. Nous comptons préciser cette limite dans un travail ultérieur, en étudiant le même problème par une toute

autre méthode. Remarquons en passant, qu'en réappliquant le principe de Navier à la déformée déjà obtenue par cette méthode, on créerait une méthode d'approximations successives permettant d'améliorer les valeurs obtenues pour les flèches sous l'action des charges verticales.

L'application du principe de Navier à une pièce dont l'axe est courbe conduit aux formules de Bresse ⁽⁴⁾. Celles-ci, lorsqu'on ne conserve que les déformations dues au moment fléchissant se réduisent pour l'extrémité supérieure de la lame à :

$$\Delta x = \int_0^L \frac{M}{EI} (L - z) dz,$$

$$\Delta z = - \int_0^L \frac{M}{EI} (x_1 - x) dz,$$

lorsqu'on assimile l'arc de lame à sa projection sur l'axe Oz et que l'autre extrémité de la lame est immobile et de direction d'encastrement fixe. Remarquons qu'on n'éprouverait pas de difficulté à tenir compte de l'influence de l'effort normal et de l'effort tranchant. Les formules seraient seulement plus lourdes.

Considérons (fig. 3) la déformée sous l'influence des forces horizontales, sollicitée par des charges verticale P et horizontale Q ainsi que par des moments d'encastrement M_0 .

Maintenons l'origine O fixe et calculons les déplacements Δx et Δz de A sous l'influence de cette sollicitation. Tenant compte que

$$M_0 = \frac{1}{2} P x_1 + \frac{1}{2} Q L,$$

les formules de Bresse donnent :

$$\Delta x = \int_0^L \left[\frac{P}{EI} \left(\frac{1}{2} x_1 - x \right) + \frac{Q}{EI} \left(\frac{1}{2} L - z \right) \right] (L - z) dz,$$

$$\Delta z = - \int_0^L \left[\frac{P}{EI} \left(\frac{1}{2} x_1 - x \right) + \frac{Q}{EI} \left(\frac{1}{2} L - z \right) \right] (x_1 - x) dz,$$

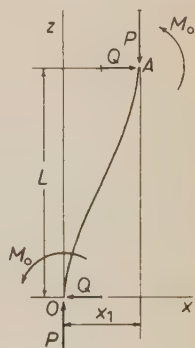


Fig. 3.

⁽⁴⁾ J. A. BRESSE: *Cours de Mécanique appliquée à l'École impériale des Ponts et Chaussées*, 2^e édit. (Paris, 1866), 1^{ère} partie, p. 97-111.

qui, tenant compte de l'équation de la déformée dont on part :

$$x = \frac{6x_1}{L^3} z^2 \left(\frac{1}{2} L - \frac{1}{3} z \right),$$

donnent, tous calculs effectués :

$$\Delta x = \frac{Px_1 L^2}{10EI} + \frac{QL^3}{12EI},$$

$$\Delta z = -17 \frac{Px_1^2 L}{140EI} - \frac{Qx_1 L^2}{10EI}.$$

Mais le dispositif étant asservi, il s'en suit que :

$$\Delta x = 0,$$

c'est-à-dire, que :

$$Q = -\frac{6}{5} \frac{x_1}{L} P;$$

portant cette valeur de Q dans Δz , il vient :

$$\Delta z = -\frac{Px_1^2 L}{700EI},$$

le signe négatif indiquant que le point A descend, ce qui est évident à priori.

Dans ce calcul nous avons négligé l'influence des forces de frottement lors de la descente du point A . Un simple coup d'œil à la fig. 1 montre que cette simplification est parfaitement licite.

Cela étant, soit $2P$ le poids de la platine; d'après ce que l'on vient de calculer la platine se rapproche du cadre raidisseur de

$$\frac{Px_1^2 L}{700EI},$$

lorsqu'elle est écartée de sa position médiane d'une longueur $2x_1$. Si $2p$ représente le poids du cadre raidisseur, la charge sur une lame supportant le cadre raidisseur est $(P+p)$ et sous cette influence (stabilisatrice d'ailleurs), le cadre raidisseur descend de

$$\frac{(P+p)x_1^2 L}{700EI},$$

donnant lieu à une descente de la platine par rapport au bâti de :

$$\eta = \frac{(2P + p)x_1^2 L}{700EI},$$

pour un déplacement $2x_1$ de la platine, compté à partir de la position médiane.

Les formules que nous venons d'établir permettent de calculer le mouvement parasite d'une telle platine. Aux approximations que nous avons faites la trajectoire parasite est une parabole à axe vertical d'équation :

$$\eta = \frac{(2P + p)\xi^2 L}{2800EI},$$

si ξ représente le déplacement de la platine à partir de la position médiane; η représentant la descente de la platine à partir de sa position la plus haute ayant lieu par ailleurs à mi-course.

Si les moments d'inertie des lames supportant platine et cadre raidisseur diffèrent, soit :

I le moment d'inertie des lames supportant la platine;

I' le moment d'inertie des lames supportant le cadre raidisseur.

La trajectoire parasite a alors pour équation :

$$\eta = \left(\frac{P}{I} + \frac{P + p}{I'} \right) \frac{\xi^2 L}{2800E}.$$

Pour terminer la question des lames de section constante sur toute la hauteur, il reste encore quelques mots à dire sur l'effort de poussée de la vis et sur les tensions qui règnent dans les lames.

L'effort de poussée se calcule aisément puisqu'il est la résultante des forces F_0 et Q calculées précédemment.

Quant à la tension maximum dans les lames, elle se calcule immédiatement par la connaissance du moment fléchissant maximum, qui se produit aux encastrements. Ce moment maximum vaut, pour une lame supportant le cadre raidisseur :

$$M'_m = \frac{1}{2} F_0 L + \frac{1}{10} (P + p)x_1,$$

ou encore :

$$M'_m = \left[\frac{6EI'}{L^2} + \frac{1}{10} (P + p) \right] x_1.$$

Tandis que pour une lame supportant la platine, il vaut :

$$M_m = \left[\frac{6EI}{L^2} - \frac{1}{10} P \right] x_1.$$

Il nous reste à étudier le cas où la lame est raidie dans sa partie centrale.

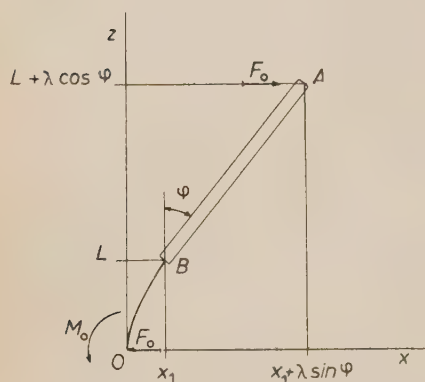


Fig. 4.

Les lames que nous considérons possèdent une partie centrale de longueur 2λ et de rigidité infinie, encadrée par deux parties flexibles de longueur L ayant I comme moment d'inertie géométrique par rapport à la fibre neutre. Une lame de suspension a donc $2\lambda + 2L$ pour longueur totale.

L'étude d'une telle lame fléchie se fait, en principe, comme celle d'une lame de section constante. Pourtant il est plus facile en pratique d'étudier une demi-lame.

Sous l'influence des seules forces horizontales et couples d'encastremements (fig. 4), l'équation différentielle de la déformée de la partie flexible de la lame est :

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{F_0}{EI} (\lambda \cos \varphi + L - z),$$

en se limitant toujours à l'hypothèse des petites déformations de la partie flexible.

Tenant compte des conditions aux limites :

$$\text{en } O: \quad z = 0, \quad x = 0, \quad \frac{dx}{dz} = 0,$$

$$\text{en } B: \quad z = L, \quad x = x_1, \quad \frac{dx}{dz} = \operatorname{tg} \varphi,$$

il vient pour la partie flexible, tous calculs effectués :

$$x = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{3L} \frac{3(\lambda \cos \varphi + L)z^2 - z^3}{2\lambda \cos \varphi + L},$$

ou :

$$x = x_1 \frac{3(\lambda \cos \varphi + L)z^2 - z^3}{L^2(3\lambda \cos \varphi + 2L)},$$

avec :

$$x_1 = \frac{L \operatorname{tg} \varphi}{3} \frac{3\lambda \cos \varphi + 2L}{2\lambda \cos \varphi + L}.$$

Dans ces diverses expressions nous laisserons l'angle φ comme paramètre.

Appliquons maintenant (fig. 5) les forces verticale P et horizontale Q comme pour les lames d'épaisseur constante.

L'utilisation des formules de Bresse conduit aux expressions suivantes du déplacement du point A :

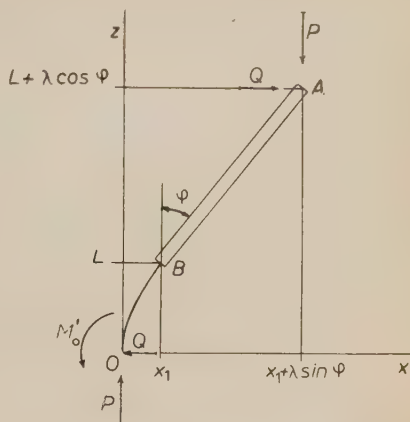


Fig. 5.

$$\Delta x_A = \frac{1}{EI} \int_0^L [P(x_1 - x + \lambda \sin \varphi) + Q(L - z + \lambda \cos \varphi)] (L - z + \lambda \cos \varphi) dz,$$

$$\Delta z_A = -\frac{1}{EI} \int_0^L [P(x_1 - x + \lambda \sin \varphi) + Q(L - z + \lambda \cos \varphi)] (x_1 - x + \lambda \sin \varphi) dz,$$

qui, en tenant compte de l'équation de l'élastique calculé plus haut donne, tous calculs effectués :

$$\Delta x_A = \frac{PL}{EI} \frac{6\lambda^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi + 8\lambda^2 L \sin \varphi \cos \varphi + 4\lambda L^2 \sin \varphi + \frac{4}{5} L^3 \operatorname{tg} \varphi}{3(2\lambda \cos \varphi + L)} + \frac{QL}{3EI} (3\lambda^2 \cos^2 \varphi + 3\lambda L \cos \varphi + L^2),$$

$$\Delta z_A = -\frac{PL}{9EI}.$$

$$\frac{36\lambda^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 60\lambda^3 L \sin^2 \varphi \cos \varphi + \frac{204}{5} \lambda^2 L^2 \sin^2 \varphi + \frac{68}{5} \lambda L^3 \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi + \frac{68}{35} L^4 \operatorname{tg}^2 \varphi}{(2\lambda \cos \varphi + L)^2}$$

$$- \frac{QL}{3EI} \frac{6\lambda^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi + 8\lambda^2 L \sin \varphi \cos \varphi + 4\lambda L^2 \sin \varphi + \frac{4}{5} L^3 \operatorname{tg} \varphi}{2\lambda \cos \varphi + L}.$$

Mais le dispositif étant asservi il s'en suit que $\Delta x_A = 0$, ce qui donne la

relation suivante entre les forces horizontale Q et verticale P :

$$Q = -P \operatorname{tg} \varphi \frac{6\mu^3 + 8\mu^2 L + 4\mu L^2 + \frac{4}{5} L^3}{6\mu^3 + 9\mu^2 L + 5\mu L^2 + L^3},$$

où l'on a posé $\mu = \lambda \cos \varphi$.

Portant dans Δz_A la valeur de Q ainsi trouvée, on obtient, tous calculs effectués:

$$\Delta z_A = -\frac{PL^3 \operatorname{tg}^2 \varphi}{45EI} \frac{12\mu^4 + 12\mu^3 L + \frac{36}{7} \mu^2 L^2 + \frac{8}{7} \mu L^3 + \frac{4}{35} L^4}{12\mu^4 + 24\mu^3 L + 19\mu^2 L^2 + 7\mu L^3 + L^4}.$$

Si la longueur L de la partie flexible de la lame est petite par rapport à la longueur $\mu = \lambda \cos \varphi$ on aura intérêt à utiliser le développement suivant:

$$\Delta z_A = -\frac{PL^3 \operatorname{tg}^2 \varphi}{45EI} \left[1 - \left(\frac{L}{\mu}\right) + \frac{71}{84} \left(\frac{L}{\mu}\right)^2 - \frac{25}{42} \left(\frac{L}{\mu}\right)^3 + \frac{1823}{5040} \left(\frac{L}{\mu}\right)^4 - \dots \right].$$

Le calcul du déplacement horizontal de la platine se fait sans difficulté. Il vaut en effet quatre fois l'abscisse x_A du point A . Or, on a:

$$x_A' = x_1 + \lambda \sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi \frac{6\lambda^2 \cos^2 \varphi + 6\lambda L \cos \varphi + 2L^2}{6\lambda \cos \varphi + 3L} = \operatorname{tg} \varphi \frac{6\mu^2 + 6\mu L + 2L^2}{6\mu + 3L}.$$

Si le rapport L/μ est petit, on préférera utiliser le développement:

$$x_A = \mu \operatorname{tg} \varphi \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{\mu}\right) + \frac{1}{12} \left(\frac{L}{\mu}\right)^2 - \frac{1}{24} \left(\frac{L}{\mu}\right)^3 + \dots \right].$$

Appelant encore $2p$ le poids du cadre raidisseur, on peut étudier de la même manière les lames supportant le cadre raidisseur et combiner les expressions ainsi obtenues.

Cela va nous conduire aux expressions ci-dessous, où ξ représente le déplacement de la platine à partir de sa position médiane, η la descente de la platine à partir du point qu'elle occupait dans la position médiane:

$$\begin{aligned} \xi &= 4 \operatorname{tg} \varphi \frac{6\mu^2 + 6\mu L + 2L^2}{6\mu + 3L} = 4\mu \operatorname{tg} \varphi \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{\mu}\right) + \frac{1}{12} \left(\frac{L}{\mu}\right)^2 - \frac{1}{24} \left(\frac{L}{\mu}\right)^3 + \dots \right]. \\ \eta &= \frac{2(2P + p)L^3}{45EI} \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{12\mu^4 + 12\mu^3 L + \frac{36}{7} \mu^2 L^2 + \frac{8}{7} \mu L^3 + \frac{4}{35} L^4}{12\mu^4 + 24\mu^3 L + 19\mu^2 L^2 + 7\mu L^3 + L^4} = \\ &= \frac{2(2P + p)L^3}{45EI} \operatorname{tg}^2 \varphi \left[1 - \left(\frac{L}{\mu}\right) + \frac{71}{84} \left(\frac{L}{\mu}\right)^2 - \frac{25}{42} \left(\frac{L}{\mu}\right)^3 + \frac{1823}{5040} \left(\frac{L}{\mu}\right)^4 - \dots \right]. \end{aligned}$$

φ étant un paramètre, et $\mu = \lambda \cos \varphi$.

On constate que la descente de la platine est sensiblement proportionnelle au cube L^3 de la longueur libre de la lame. Il y a donc intérêt à réduire cette longueur le plus possible. Remarquons encore que l'angle φ n'est jamais très grand dans les dispositifs réalisés; il vaut tout au plus 10 degrés. Pour beaucoup de dispositifs réalisés on constatera que la seconde fraction de l'expression de η reste sensiblement constante.

Dans les expressions qui précèdent on a supposé que les lames de support du cadre raidisseur étaient identiques à celles du support de platine. Au cas où les lames supportant la platine ont I pour moment d'inertie, alors que celui des lames du cadre raidisseur est I' , on remplacera dans l'expression précédente

$$\frac{2P + p}{I},$$

par

$$\frac{P}{I} + \frac{P + p}{I'}.$$

Ici, comme précédemment, le calcul de la poussée axiale de la vis se fait sans difficulté. Il suffit de se souvenir que cet effort est la résultante des forces Q , calculée précédemment et F_0 que l'on montre facilement être égale à:

$$F_0 = \frac{2EI \operatorname{tg} \varphi}{L(2\lambda \cos \varphi + L)}.$$

Quant à la tension régnant dans les lames, elle se calcule immédiatement par la connaissance du moment fléchissant maximum qui se produit aux encastremements.

Ce moment vaut, pour une lame supportant la platine:

$$M_m = \frac{2EI(\mu + L) \operatorname{tg} \varphi}{L(2\mu + L)} - PL \operatorname{tg} \varphi \frac{6\mu^3 + 6\mu^2L + \frac{12}{5}\mu L^2 + \frac{2}{5}L^3}{6\mu^3 + 9\mu^2L + 5\mu L^2 + L^3}.$$

Pour une lame supportant le cadre raidisseur, il suffira, dans cette expression de changer I en I' et P en $-(P+p)$.

L'auteur tient à remercier tout particulièrement le professeur G. P. S. OCCHIALINI de l'intérêt qu'il n'a cessé de porter à ce travail. Il lui exprime toute sa gratitude pour l'avoir conduit à préciser sa pensée lors de nombreuses discussions aussi amicales qu'instructives.

RIASSUNTO (*)

Dopo una breve rassegna storica dei dispositivi proposti per la realizzazione di una guidatura rettilinea su guide elastiche, l'autore espone un metodo approssimato per il calcolo delle sospensioni simmetriche e simmetricamente caricate di tipo asservito. Il metodo, valido anche per sospensioni le cui guide non sono di lunghezze identiche, utilizza le relazioni di Navier-Bresse, rendendo il problema lineare. Il metodo presuppone quindi carichi deboli della platina e del telaio di irrigidimento. Le formule sono date per i due casi principali: guide elastiche per tutta la loro altezza e guide simmetriche irrigidite nella parte centrale.

(*) *A cura della Redazione.*

On the Properties of a Spectrometer for Linear Electron Accelerators (*).

C. C. GROSJEAN and V. J. VANHUYSE

*Interuniversitair Instituut voor Kernwetenschappen
Centrum van de Rijksuniversiteit - Gent, Belgio*

(ricevuto il 12 Aprile 1954)

Summary. — In connection with a specific problem concerning an electron spectrometer, we have solved the relativistic equations of motion of an electron in an arbitrary transverse magnetic field with radial symmetry. A detailed discussion of the exact formulae describing the motion of the particles on their trajectories, leads to the following conclusions: 1) The invariance of the relation between coil current and detected electron energy. 2) The detected beam current does not directly provide the true energy spectrum, since it is proportional to the product of the beam intensity per unit energy interval times an energy dependent factor. 3) A particular property of the trajectories may possibly lead to a new method for a precision measurement of the electron energy in a mono-kinetic beam.

1. — Introduction.

It is well-known that the energy spectrum of fast electrons produced by a linear accelerator can be determined by deviation of the particles in a magnetic field. When two identical air-cored coils are placed coaxially at a certain distance from each other, the magnetic field in each point of the symmetry plane between them is perpendicular to that plane and only function of the distance r to the centre of the system. Directing the electrons in the symmetry plane towards the centre, they will describe trajectories depending on their kinetic energy E and the electric current I through the coils. Putting

(*) This paper is a part of the theoretical research done in connection with a linear electron accelerator project.

two slits in an appropriate position, it is possible to detect only a narrow beam of deviated particles having an energy in a small region ($E - \Delta E/2$, $E + \Delta E/2$) around a well-defined energy E . When I varies linearly with time from zero to a maximum I_m , the average E of the detected energy region changes practically from zero to a maximum E_m , according to a certain law. Synchronizing the sweep of a cathode ray tube with the voltage from the field coils, and making the vertical deflection of the spot proportional to the amplified voltage produced by the detected beam current, one obtains a graph which is generally regarded as the energy spectrum. Of course, the I -scale has to be replaced by the E -scale and this requires the knowledge of the exact relationship between coil current and energy. This problem is usually simplified by replacement of the existing magnetic field by an idealized one being homogeneous in a circular region and zero elsewhere (¹). After some simple calculations, one finds

$$(1) \quad I = C\sqrt{E(E + 2m_0c^2)},$$

in which C is a proportionality factor. In reality, however, the exact field in the symmetry plane of the coils is a rather complicated function of r even changing sign at a certain value of r not very different from the average radius of the coils. Therefore, it seems reasonable to examine in how far (1) will be modified when the theory is worked out taking the existing field into account. The reason for writing this article is that the exact solution of the problem leads to some interesting conclusions which are, to the authors' knowledge, not widely known.

2. — Theoretical Development.

Let $H(r)$ describe a magnetic field with radial symmetry around a point O and perpendicular to the Oxy -plane. $H > 0$ corresponds to a field pointing in the upward direction. Suppose an electron comes in with an initial velocity v_0 along the x -axis moving in the negative direction (Fig. 1). The relativistic equations of motion are

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H},$$

(¹) J. VASTEL: *Ann. de Radioélectr.*, **7**, n. 27 (Janv. 1952); A. SARAZIN: *Ann. de Radioélectr.*, **8**, n. 33 (Juill. 1953); J. G. THOMASON: *A spectrometer for the 4-MeV lin. electr. accelerator*, A.E.R.E. Report N. G/R217 (Harwell, 1948).

in which v represents the electron velocity, m_0 the electron mass, e the electron charge and c the velocity of light. Multiplying on both sides by v , one can deduce the energy equation

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 0$$

proving that

$$(4) \quad v = v_0$$

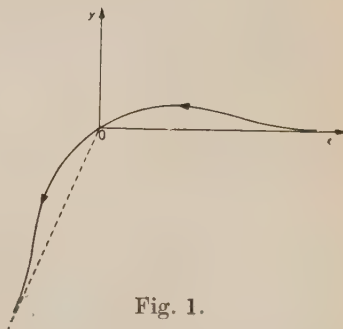


Fig. 1.

must be satisfied during the motion. Introducing polar coordinates, (2) gives rise to

$$(5) \quad \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{e}{c} r\dot{\theta}H(r),$$

$$(6) \quad \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = \frac{e}{c} \dot{r}H(r) \quad \left(\beta \equiv \frac{v_0}{c}\right),$$

which we have to solve with the initial conditions:

$$(7) \quad r_0 = +\infty, \quad \theta_0 = 0, \quad (r \sin \theta)_0 = 0, \quad \dot{r}_0 = -v_0, \quad \dot{\theta}_0 = 0.$$

In these equations, e represents the positive value of the electron charge. The solution of the problem can further be based on eq. (6) only, since a suitable combination of (5) and (6) again leads to (4). Multiplying (6) by r , we can write

$$(8) \quad \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = \frac{e\sqrt{1 - \beta^2}}{m_0 c} r H(r) \frac{dr}{dt}$$

and after integration

$$(9) \quad r^2 \dot{\theta} = -\frac{e\sqrt{1 - \beta^2}}{m_0 c} \int_r^\infty r' H(r') dr',$$

since $(r^2 \dot{\theta})_{r=\infty} = 0$. The velocity component v_θ can therefore be calculated in every point of the plane by the use of

$$(10) \quad r\dot{\theta} = -\frac{e\sqrt{1 - \beta^2}}{m_0 c r} \int_r^\infty r' H(r') dr'.$$

Now there are two cases to be considered:

1) $|r\dot{\theta}|$, calculated from (10), is always smaller than v_0 .

In this case, it can be shown that the electron passes through the centre O . Indeed, let r converge to zero in (10). If we had

$$(11) \quad \int_0^{\infty} r' H(r') dr' \neq 0,$$

we see that $r\dot{\theta}$ would become almost proportional to r^{-1} in the neighbourhood of the origin. Hence there would exist a value of r for which $|r\dot{\theta}|$ would be equal to v_0 in contradiction to our supposition. Therefore, in the present case, we must have

$$(12) \quad \int_0^{\infty} r' H(r') dr' = 0$$

and

$$(13) \quad \lim_{r \rightarrow 0} r\dot{\theta} = \frac{e\sqrt{1-\beta^2}}{m_0 c} \lim_{r \rightarrow 0} rH(r) = 0,$$

since $H(0)$ is always finite, in reality.

As the particle progresses on its path, the radial velocity component v_r diminishes in favor of v_θ , but it remains directed towards the centre O . In the neighbourhood of O , v_r increases again as v_θ tends to zero and the particle passes exactly through the centre. From that instant on, the electron describes the second half of its trajectory which is symmetric with the first half with respect to the normal through O .

2) $|r\dot{\theta}|$ becomes equal to or larger than v_0 .

Let r_m represent the largest value of r for which

$$(14) \quad |r\dot{\theta}| = v_0$$

so that

$$(15) \quad |r\dot{\theta}| < v_0 \quad \text{for } r > r_m.$$

r_m is the minimum distance of approach of the particle towards the origin O .

A) If $r = r_m$ is an ordinary point of the curve v_θ vs. r , the Taylor expansion of $|r\dot{\theta}|$ in a small region around r_m is of the form

$$(16) \quad |r\dot{\theta}| = v_0 - C_1(r - r_m) + O[(r - r_m)^2],$$

in which C_1 is positive according to (15). As the electron approaches r_m , we may write

$$(17) \quad \frac{dr}{dt} = -\sqrt{v_0^2 - r^2\dot{\theta}^2} = -\sqrt{2v_0C_1(r-r_m) + O[(r-r_m)^2]}$$

and

$$(18) \quad \int_{r_m}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{2v_0C_1(r-r_m) + O[(r-r_m)^2]}} = t - t_1 \quad (r_m < r \leq r_1),$$

r_1 being the distance of the electron at time t_1 . Choosing r_1 sufficiently near to r_m , the terms represented by $O[(r-r_m)^2]$ can be made negligible, so that the approximate integration leads to

$$(19) \quad \sqrt{\frac{2}{v_0C_1}} [\sqrt{r_1 - r_m} - \sqrt{r - r_m}] \cong t - t_1.$$

Defining

$$(20) \quad t_m = t_1 + \sqrt{\frac{2(r_1 - r_m)}{v_0C_1}},$$

(19) may be transformed into

$$(21) \quad (r - r_m) \cong \frac{v_0C_1}{2} (t - t_m)^2 \quad (r_m \leq r \leq r_1).$$

At $r = r_m$ we have exactly

$$(22) \quad \frac{d^2r}{dt^2} = v_0C_1 > 0.$$

This proves that the particle reaches r_m in a finite time and that from that point on, it starts to describe the second half of its trajectory again symmetrically with the first half.

B) If $r = r_m$ happens to be a maximum or a point of inflexion with zero slope, the Taylor expansion of $|r\dot{\theta}|$ will generally be of the form:

$$(23) \quad |r\dot{\theta}| = v_0 - C_\alpha(r - r_m)^\alpha + \dots$$

in which α can be any integer larger than 1 and $C_\alpha > 0$. In the same way as above, the approximate form of the trajectory in a small region (r_m, r_1) of r

will be given by

$$(24) \quad r - r_m \cong (r_1 - r_m) \exp [-\sqrt{2v_0 C_2} (t - t_1)] \quad \text{for } \alpha = 2,$$

$$(24') \quad (r - r_m)^{1-\frac{1}{2}\alpha} - (r_1 - r_m)^{1-\frac{1}{2}\alpha} \cong \sqrt{2v_0 C_\alpha} \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) (t - t_1) \quad \text{for } \alpha > 2.$$

Hence when $\alpha \geq 2$, the time before the particle reaches r_m is theoretically infinite and the electron converges asymptotically towards r_m describing an infinite number of revolutions around the origin O .

Considering a particle with initial conditions (7), it is clear that only in the cases [1] and [2A], one can talk about an angle of deviation namely the angle between the two asymptots of the trajectories. Therefore, let us complete the solution of the problem in these two cases by calculating the first half of the particle path. Combining (10) with

$$(25) \quad v_0^2 (dt)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2$$

and eliminating dt , one obtains

$$(26) \quad \frac{d\theta}{dr} = \frac{\frac{e\sqrt{1-\beta^2}}{m_0 c^2 \beta r^2} \int_r^\infty r' H(r') dr'}{\left[1 - \left\{ \frac{e\sqrt{1-\beta^2}}{m_0 c^2 \beta r} \int_r^\infty r' H(r') dr' \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Therefore, the first half of the trajectory is described by

$$(27) \quad \theta(r) = \frac{e\sqrt{1-\beta^2}}{m_0 c^2 \beta} \int_r^\infty \frac{\frac{dr'}{r'^2} \int_{r'}^\infty r'' H(r'') dr''}{\left[1 - \left\{ \frac{e\sqrt{1-\beta^2}}{m_0 c^2 \beta r'} \int_{r'}^\infty r'' H(r'') dr'' \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}},$$

from which the final deviation angle Θ can be calculated.

For case [1], we find

$$(28) \quad \begin{cases} \Theta = 2|\theta(0)| - 2k\pi & \text{if } 2k\pi \leq 2|\theta(0)| \leq (2k+1)\pi \\ \Theta = 2k\pi - 2|\theta(0)| & \text{if } (2k-1)\pi \leq 2|\theta(0)| \leq 2k\pi \end{cases}$$

and for case [2A]:

$$(29) \quad \begin{cases} \Theta = 2|\theta(r_m)| - (2k-1)\pi & \text{if } (2k-1)\pi \leq 2|\theta(r_m)| \leq 2k\pi \\ \Theta = (2k+1)\pi - 2|\theta(r_m)| & \text{if } 2k\pi \leq 2|\theta(r_m)| \leq (2k+1)\pi. \end{cases}$$

These results are applicable to an infinitely thin electron beam which is perfectly directed towards the centre of the spectrometer. In reality however, these conditions are never exactly satisfied and in order to take this into account, we may try to extend the calculations to the case of a particle incoming with a non-zero impact parameter. This means electrons satisfying the initial conditions

$$(30) \quad r_0 = +\infty, \quad \theta_0 = 0, \quad (r \sin \theta)_0 = p, \quad \dot{r}_0 = -v_0, \quad \dot{\theta}_0 = 0.$$

In exactly the same way as before, the problem can be solved with an arbitrary field $H(r)$ and it turns out that (27) has to be replaced by the more general formula

$$(31) \quad \theta(r) = - \int_r^\infty \frac{\frac{dr'}{r'^2} \left\{ \frac{e\sqrt{1-\beta^2}}{m_0 c^2 \beta} \int_{r'}^\infty r'' H(r'') dr'' - p \right\}}{\left[1 - \left\{ \frac{e\sqrt{1-\beta^2}}{m_0 c^2 \beta r'} \int_{r'}^\infty r'' H(r'') dr'' - \frac{p}{r'} \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

for the first half of the path.

3. - Returning to the original problem, where the magnetic field is produced by the coil current I , we may say that

$$(32) \quad H(r) = If(r),$$

in which $f(r)$ characterizes the field distribution. Introducing this in (27) and (31), it is clear that a trajectory remains unchanged if the relation

$$(33) \quad I = C \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

is satisfied. Expressed in terms of the kinetic energy E , (33) becomes equivalent to (1).

Now, let us consider an electron beam having a uniformly distributed energy spectrum throughout its cross-section. Suppose that with a current I_1 and

a particular position of the two slits, we are able to detect the electrons in the narrow interval $(E_1 - \Delta E_1/2, E_1 + \Delta E_1/2)$. When the current changes to I , we see that the same set of trajectories passing through the slits will now be described by particles in a new interval $(E - \Delta E/2, E + \Delta E/2)$ determined by

$$(34) \quad \frac{I}{I_1} = \frac{\sqrt{E(E + 2m_0c^2)}}{\sqrt{E_1(E_1 + 2m_0c^2)}}$$

and

$$(35) \quad \frac{\Delta E}{\Delta E_1} = \frac{\frac{E(E + 2m_0c^2)}{(E + m_0c^2)}}{\frac{E_1(E_1 + 2m_0c^2)}{(E_1 + m_0c^2)}}$$

This is not only valid for two slits placed at large distance from the centre where the trajectories become practically straight lines, but also for any arbitrary position of the slits. Therefore, we may conclude that the relation (1) between coil current and electron energy is rigorously valid for each considered transverse magnetic field with radial symmetry. In addition to this, (35) shows that the detected energy interval ΔE is not constant, but varies sensitively with the average energy E , proving that the detected beam is not directly proportional to the particle current per unit energy interval. If $i(E)$ represents this current density, the vertical deviation of the cathode ray is proportional to

$$(36) \quad i(E) \frac{E(E + 2m_0c^2)}{(E + m_0c^2)}.$$

The factor by which $i(E)$ is multiplied causes a deformation of the real spectrum. Indeed, it is formed by the product of E times a factor varying from 2 to 1 as the energy increases from zero to infinity. Hence, a peak of accelerated electrons in a relatively high energy region has the appearance to correspond to a much larger intensity than an equivalent peak at lower energies. This greater efficiency of the spectrometer at higher energies is in fact an essential property of the apparatus. But it means that in practice when the graph on the cathode ray screen consists of a small peak due to electrons with initial energy plus a large peak of accelerated electrons, one may not directly conclude that nearly all the particles have been accelerated. Other effects due to the factor are the broadening of peaks and the slight shift of their maximum towards higher energies.

4. — Application of the theory.

We wish to apply the results of § 2 to the case of two equal and coaxial air-cored coils. Let us first consider the simplified case of two circular conductors with radius R placed at a distance $2L$ from each other. One can easily calculate the field $H(r)$ in the symmetry plane, when a current I is used:

$$(37) \quad H(r) = \frac{4RI}{10} \int_0^\pi \frac{(R - r \cos \psi) d\psi}{(r^2 - 2rR \cos \psi + R^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}}$$

in which H is measured in oerstedt and I in ampere. The integral

$$(38) \quad \int_r^\infty r' H(r') dr'$$

can be calculated from

$$(39) \quad \int_0^r r' H(r') dr' = \frac{4RI}{10} \int_0^r r' dr' \int_0^\pi \frac{(R - r' \cos \psi) d\psi}{(r'^2 - 2r'R \cos \psi + R^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}},$$

which can be reduced to

$$(40) \quad \int_0^r r' H(r') dr' = \frac{4L}{10} \left[(R^2 + L^2 + r^2) \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{[(R + r)^2 + L^2 - 4rR \sin^2 \varphi]^{\frac{3}{2}}} - \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{[(R + r)^2 + L^2 - 4rR \sin^2 \varphi]^{\frac{1}{2}}} \right]$$

by using cartesian coordinates (ξ, η) instead of (r', ψ) in the integration plane of (39) and by putting

$$(41) \quad \eta = r \sin 2\varphi,$$

after integration with respect to ξ . Introducing the complete elliptic integrals

$K(k)$ and $E(k)$, we have

$$(42) \quad \int_0^r r' H(r') \, dr' = \frac{4I}{10} [(R+r)^2 + L^2]^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right\} = \\ = \frac{2\pi I}{10} \cdot \frac{r^2 R^2}{[(R+r)^2 + L^2]^{\frac{3}{2}}} \left[1 + \frac{3}{4} k^2 + O(k^4) \right]$$

in which $k \equiv 2\sqrt{rR}/\sqrt{(R+r)^2 + L^2}$.

For $r \rightarrow \infty$, we find

$$(43) \quad \int_0^\infty r' H(r') \, dr' = 0.$$

Defining the dimensionless parameters

$$(44) \quad x = \frac{r}{R}, \quad \alpha = \frac{L}{R},$$

we obtain

$$(45) \quad \frac{1}{r} \int_r^\infty r' H(r') \, dr' = \frac{8I}{10k\sqrt{x}} \left[E(k) - \left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) \right] \quad \left(k \equiv \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{[(1+x)^2 + \alpha^2]^{\frac{1}{2}}} \right)$$

and from (10), we deduce

$$(46) \quad r\dot{\theta} = \frac{8eI\sqrt{1-\beta^2}}{10m_0c} \cdot \frac{1}{k\sqrt{x}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right].$$

In fig. 2, we have plotted

$$(47) \quad y = f(x, \alpha) \equiv \frac{1}{k\sqrt{x}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right]$$

as a function of x for a few values of α . The curves reach a maximum in the vicinity of $x=1$ as it was to be expected. Let us define the current

$$(48) \quad I_c(\alpha) = \frac{10m_0c^2}{8e} \cdot \frac{1}{[f(x, \alpha)]_{\max}} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Keeping in mind our previous discussion, three cases have to be considered:

1) $I < I_c$. Then we know that v_θ is always smaller than v_0 and the particles pass through the origin. The final deviation angle can be derived from

$$(49) \quad 2\theta(0) = 2 \int_0^\infty \frac{f(x, \alpha)}{[(25m_0^2 c^4 \beta^2 / 16e^2 I^2 (1 - \beta^2)) - f^2(x, \alpha)]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{dx}{x}$$

which can easily be reduced to an angle between 0 and π (cfr. (28)).

2) $I > I_c$. The distance of closest approach to the centre can be determined by intersection of

$$(50) \quad y = \frac{10m_0 c^2}{8eI} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

with $f(x, \alpha)$, taking the point with the largest x -coordinate. For every value of α , this distance is at least of the order of the radius R , for it is always larger than the abscissa of the point where $f(x, \alpha)$ reaches its maximum.

3) $I = I_c$. This is precisely the case [2B] in which $r = r_m$ happens to be a maximum. Theoretically the particle will describe a trajectory approximately given by (24). In practice, however, some small perturbations may cause the particle to behave as in one of the preceding cases.

Anyway, it seems a remarkable fact that the distance of closest approach to the centre undergoes a sharp discontinuity at the «critical» current I_c , as it is exactly zero when I is smaller than I_c and at least of the order of R when I is larger than I_c . In principle, this could lead to the possibility of an accurate determination of the electron velocity in a monoenergetic beam. An electron detector placed at the centre of our system of coaxial coils would first transmit the full beam intensity as long as the increasing I is lower than the critical current, and then drop to zero for I exceeding I_c . In the case of a beam in which the energies are distributed as a peak with a finite width, the method would at least permit the measurement of the average energy. The relation between I_c and v/c is relatively simple to calculate in each special case using (48), which shows the same energy dependence as (33). For instance, applying (48) in the case of $L = R/2$ or $\alpha = 1/2$, we find

$$(51) \quad I_c = \frac{10 \times 0.91 \cdot 10^{-27} \times (3 \cdot 10^{10})^2}{8 \times 4.80 \cdot 10^{-10}} \cdot \frac{1}{0.443} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 4\,814.5 \cdot \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ A}.$$

It is clear that the simplicity of this calculation would make the method particularly interesting for the absolute calibration of a monoenergetic beam.

All these considerations apply to the case of an infinitely thin and perfectly centered electron beam deviated in the magnetic field of two coaxial circular conductors. But in practice, the problem is somewhat more involved due to the following factors:

1) The field is produced by two coils. This makes the application of the formulae slightly more complicated but the curves replacing those of Fig. 2

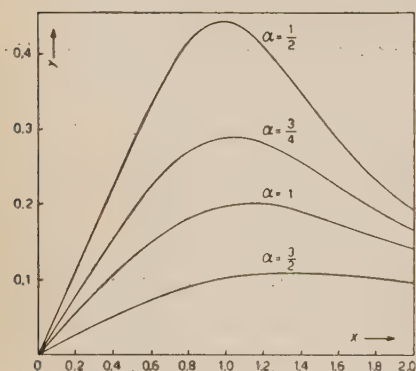


Fig 2.

will show essentially the same behaviour and all our conclusions will remain unaltered. In the case of two coils at an average distance equal to half their average diameter, (51) provides approximately the number of ampere-turns required.

2) The particle beam is not ideally thin. This necessitates an analysis of the behaviour of particles incoming with a small impact parameter p . It can easily be shown that the distance of closest approach to the centre remains practically equal to p as long as I is smaller than a critical current and shows the same dis-

continuity as before when I exceeds this current. The latter is slightly dependent on p and will therefore not be rigorously equal to I_c calculated for $p = 0$. This will only have the effect of making the discontinuity in the detected current less abrupt, but it must still be very clearly observable.

It is a pleasure to thank the Institut Interuniversitaire des Sciences Nucléaires and Prof. Dr. J. L. VERHAEGHE for his interest in this work.

RIASSUNTO (*)

In connessione con un problema specifico concernente uno spettrometro elettronico, abbiamo risolto le equazioni relativistiche del moto di un elettrone in un campo magnetico trasversale arbitrario a simmetria radiale. La discussione dettagliata delle formule esatte che descrivono il moto delle particelle lungo le loro traiettorie porta alle conclusioni seguenti: 1) la relazione tra la corrente di campo e l'energia elettronica rivelata è invariante; 2) la corrente elettronica non fornisce direttamente il vero spettro energetico, poichè è proporzionale al prodotto dell'intensità della corrente per intervallo unitario dell'energia moltiplicata per un fattore dipendente dall'energia; 3) una proprietà particolare delle traiettorie può forse condurre a un nuovo metodo per la misura di precisione dell'energia elettronica in un fascio monocinetico.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

An Amplifier with Low Dissipation and Short Rise-Time for C.R.T. (*).

D. BRINI, L. PELI, O. RIMONDI and P. VERONESI

Istituto di Fisica dell'Università - Bologna

(ricevuto il 15 Aprile 1954)

Summary. — A description is made here of a C.R.T. Amplifier for negative input, set up with secondary-emission tubes, whose dissipation was 55 mA, gain 400 and rise time not greater than 7 μ s.

In the last few years scintillation counters have reached a high degree of development and have been used in many fields of nuclear physics. The counters with organic liquids or crystals give pulses with a short rise time. This has necessitated a study of the appropriate electronic techniques.

The presentation of pulses to a C.R.T. requires amplifiers whose fundamental requirements are as follows:

- a) short rise time;
- b) high level output.

Point a) is in practice limited, for conventional types of linear amplifiers, by the characteristics of used tubes, namely by their figure of merit F' which, as is known, is represented by

$$F' = \frac{g}{2.2C_i} \quad (1)$$

(where C_i is usually the sum of the input capacity with the tube output capacity).

(*) This work has been partially supported by the Padua Section of the I.N.F.N..

(1) VALLEY WALMAN: *Vacuum Tube Amplifiers* (M.I.T.), p. 73.

For the interstage tubes which are more currently used in wide-band amplifiers, the figures of merit are as shown in Table I.

TABLE I.

	g (mA/V)	C_t (pF)	F (1/ μ s)	Dissipation (mA)
6AC7	9	19	230	13
6CB6	6.2	10	280	12.5
6AH6	9	14	290	13
6AK5	5.2	8	300	10

The figures of merit of the tubes which are commonly used as the push-pull output stage are as shown in Table II.

TABLE II.

	g (mA/V)	C_t (pF)	F (1/ μ s)	Dissipation (mA)
832 A	3.5	13	120	150
two 807	6	21	130	200
829 B	8.5	23	170	200

The conventional amplifiers utilizing about 10 tubes, which dissipate 200 to 300 mA and have a gain of the order of 100 with a reasonable output for presentation to a C.R.T., can reach rise times about 100 μ s.

With critical quadrupole compensation, such amplifiers can reach rise times not smaller than 20 to 30 μ s ⁽²⁾.

A substantial improvement can be obtained with the use of distributed amplifiers, which have been developed in the last few years ⁽³⁾. Rise times which can be reached with such amplifiers are about 2 to 3 μ s. This necessitates, however, the use of a large number of tubes, which includes a high dissipation of current and high costs.

It is often required to have good rise times without arriving at those which are realized with distributed amplifiers. This can be obtained by using the secondary-emission tubes ⁽⁴⁾ such as the EFP60, recently put on the market by Philips.

⁽²⁾ As ⁽¹⁾, page 110.

⁽³⁾ G. F. MYERS: *Electronics*, Jan., 128 (1952); G. C. KELLEY: *Rev. Scient. Instr.*, 71 (1950).

⁽⁴⁾ C. W. MÜLLER: *Proc. I.R.E.*, 39, 159 (1950).

By reasons of their secondary emission, these tubes possess great transconductance, which greatly increases their figure of merit. Table III reports the EFP60 figures of merit, where the outputs taken on the plate and on the multiplier dynode respectively were used.

TABLE III.

	g (mA/V)	C_t (pF)	F (1/ μ s)	Dissipation (mA)
Plate	25	17	670	22
Dynode	20	22	410	22

For signals of single polarity, the EFP60, however, for sufficiently high peak current, can also be used as output tubes, obtaining two outputs in push-pull, one on the plate and one on the multiplier dynode.

On the basis of these observations we have realized an amplifier which satisfies following requirements:

- input for negative pulses;
- gain of about 400;
- total rise time of 5 to 7 μ s;
- output of about 45 V (in order to obtain on a 5XP C.R.T. a deflexion of about 1 inch);
- low current dissipation (55 mA).

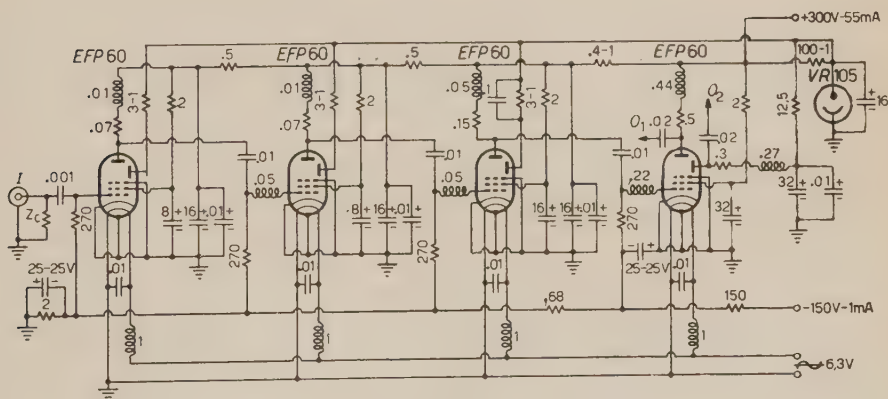


Fig. 1. — All the resistors are in k Ω . All the capacitors are in μ F. All the inductors are in μ H.

The scheme is shown in Fig. 1. As will be seen it is a conventional scheme with quadruple critical compensation. The dynode load in the output stage is less than the plate one, notwithstanding the smaller transconductance of

the tubes relative to the dynode. This is with the aim of obtaining equal rise times for the two outputs in push-pull. For this reason we obtained as maximum outputs about 30 V on the plate and about 15 on the dynode.

The rise-time measurements were made by the oscillographic method, with pulses obtained by a mercury relay (of the Westinghouse 275B type). Pulses of a known length were used for the calibration of the syncroscope sweep. Various photographs were taken with different pulse-shaping times, the rise times being calculated therefrom. The measurements show that the rise time is certainly between 5 and 7 μs .

The gain, measured with slow calibrated pulses, was about 400, and the output (linear) 45 V.

These data proved to be in agreement with those calculated.

In the practical setting-up of the amplifier great care had to be taken in the search for earth points for each stage, in order to avoid self-oscillations.

Both the filtering of the alternating current heater and the electrolitical condensers by-passed with ceramic capacities were found to be convenient.

Thanks are due to Mr. R. DEGLI ESPOSTI for his collaboration in the setting up of the circuit.

RIASSUNTO (*)

Si descrive un amplificatore C.R.T. per impulsi di entrata negativi, costruito con tubi ad emissione secondaria, con dissipazione di 55 mA, guadagno 400 e tempo di salita non superiore a 7 μs .

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Study of a Liquid Scintillation Counter (*).

D. BRINI, L. PELI, O. RIMONDI and P. VERONESI

Istituto di Fisica dell'Università - Bologna

(ricevuto il 15 Aprile 1954)

Summary. — This paper deals with a liquid scintillation counter of small thickness (1 cm) and of circular cross-section (10 cm in diameter). The measurements have shown that its efficiency in revealing relativistic particles is practically 100%, and that its real diameter corresponds to the geometric one. The measurements permit the conclusion that the collection of light is about 30% of that emitted in scintillation, with a disuniformity in the light collected not greater than 30%.

To count the relativistic charged particles a liquid scintillation counter was constructed, which, in addition to the known property of rapidity, presented the following characteristics:

- a) a high efficiency over the whole sensible area;
- b) a cylindrical geometrical form of small thickness;
- c) a minimum thickness in the direction of the path of the particles (that of the cylinder axis).

The design of the apparatus used is shown in Fig. 1.

A vessel (1), containing a solution (3 g of p-terphenyl + 10 mg of diphenylhexatriene in 1 litre of phenylcyclohexane) was constructed from a sheet of plexiglass, 12 mm in thickness, and closed in a cylindrical box (2) (3) made from a sheet of brass of 0.2 mm in thickness, the inside walls of which were varnished with MgO. On one side of the box there was a cylindrical tube (4), which contained a photomultiplier 5819 (6), in optical contact with the side wall of the vessel, which, in such a position, was flat. Optical contact was

(*) This work was partially supported by the Padua Section of the I.N.F.N..

realized with silicon oil D.C. 200 placed between the above-mentioned wall and the plexiglass disc (5); (9), between this disc and the photomultiplier head we put vaseline oil held in by rubber gaskets (9) between the photomultiplier and the metal tube (4).

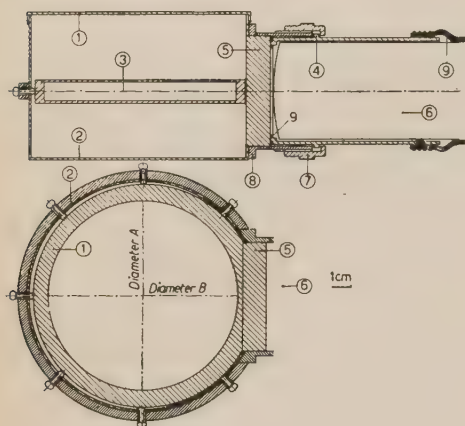


Fig. 1.

The photomultiplier was attached laterally in order to satisfy condition c) of the project. The type of optical collection used was in accordance with the prime necessity for obtaining the greatest collection of light, even at the risk of a loss of uniformity and rapidity, which would suggest the use of a different optical collection ⁽¹⁾.

Using the following hypotheses for purposes of simplification, we may calculate light collection as under:

- a) the cylindrical box was conceived as a white sphere containing the vessel in its maximum section;
- b) the index of refraction of the material, of which the vessel was constructed ($n_1=1.49$) was the same as that of the scintillator ($n_2=1.52$);
- c) the opening made on the sphere was small in respect to its diameter;
- d) scintillation was in point form;
- e) the body was perfectly transparent.

Total light collection was due to the following contributions:

- 1) the fraction of light which arrived on the photomultiplier directly from the point of scintillation;
- 2) the fraction of light which was entrapped in the vessel by total reflection, and which partly reached the photomultiplier;
- 3) the fraction of light partly diffused by the white wall.

The calculation ⁽²⁾ (*) of the second contribution showed that the quantity of light which remained entrapped in the vessel was a growing function of

⁽¹⁾ R. L. GARWIN: *Rev. Scient. Instr.*, **23**, 255 (1952).

⁽²⁾ W. A. SHURCLIFF and R. C. JONES: *Journ. Opt. Soc. of Am.*, **39**, 912 (1949).

(*) See Appendix.

the distance from the centre of the point at which scintillation took place. In fact, the rays making an angle φ (see Fig. 2) between the values φ_1 and φ_2 defined by

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{n}; \quad \cos \varphi_2 = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad \text{with } k = d/r,$$

remained entrapped, since they made an angle greater than the critical angle. This light, after successive reflections, reached the anterior face of the light conductor 5 (Fig. 1). Not all of it, however, reached the photomultiplier, because part of it escaped laterally, owing to the angles of incidence.

In Fig. 3 the curve A_n represents contributions 1) and 2) for the diameter perpendicular to the photomultiplier axis. The light diffused by the white wall is not present.

The curve A_b represents, on the other hand, the percentage of the total flux emitted in scintillation and collected by the photomultiplier, with the addition of contribution 3). The calculation of the light diffused was made with the formula of Ulbricht's sphere with a diffusion coefficient $K = 0.9$.

The other two curves refer to the diameter B (photomultiplier axis). The greater disuniformity in the collection depends evidently on the notable increase of contribution 1) when scintillation took place near the photomultiplier.

The substitution of the white sphere with a cylinder, leads, for reasons of symmetry and imperfect diffusion, to a supervaluation in the calculations made, of the contribution of the diffusion for those points far from the cylinder axis: that leads, in practice, to a better uniformity in light collection. As will be seen

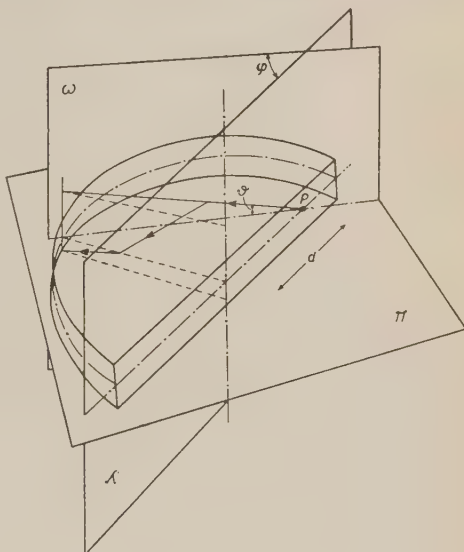


Fig. 2.

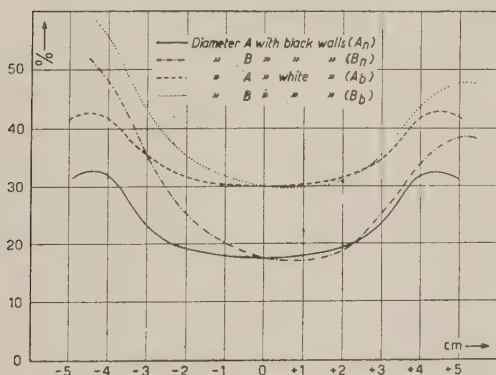


Fig. 3.

from Fig. 3, the diffusion increases light collection in the central zone to about 70%.

Experimental measurements of light collection were effected with a source of γ (50 mC of Co^{60}), collimating a bundle with a lead screen of 10 cm thick, in which a hole of 6 mm in diameter was bored. The counter was hit by such a bundle at several distances from the centre, along a diameter, measurements

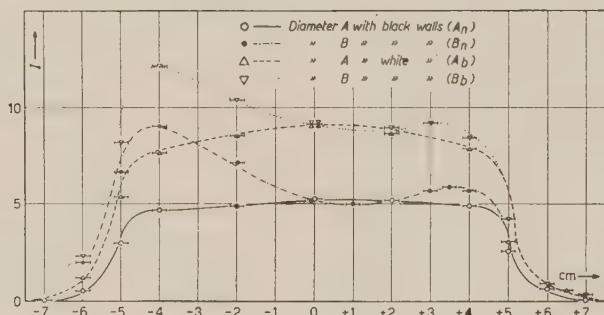


Fig. 4.

being taken of the corresponding anodic current. The intensity of the current versus the distance of scintillation from the centre was then set down in diagram form (Fig. 4).

The decrease of the intensity of the current near the edge was not due to a minor light collection, but to diffusion of γ and to the fact than the bundle of γ had finite dimensions.

These contributions can be taken into account from the values of the current beyond 5 cm from the centre of the counter. In so doing a good agreement with the curves of Fig. 3 which give light collection can be noted. Regarding the percentual increase of light collection due to the white walls it was observed that the agreement was excellent.

It is to be noted that the counter is not uniform; yet it can be affirmed that the disuniformity is not greater than 30%, although such a maximum disuniformity takes place only in a very limited area near the photomultiplier cathode.

The efficiency proofs regarding the revelation of the relativistic particles were effected with the apparatus shown in Fig. 5. A telescope, formed by the GM counter plates 1, 2 and 3, defined a solid angle covered by 10 cm of lead. The photomultiplier 5819 functioned at 1000 V, the tensions being distributed in the proportions of 2, 1, 1, etc..

The threefold coincidence noted the number of particles crossing a $4 \times 6 \text{ cm}^2$ area of the scintillation counter. The fourfold coincidence showed the number

of particles revealed by the scintillation counter too. A registration of the events of the threefold and fourfold coincidences made over some days gave the following results: threefold 1369; fourfold 1359. The efficiency was then 0.992 ± 0.0024 .

The three and fourfold chance coincidences were calculated, but proved negligible, since the frequency of each plate was rather low and the resolving power of the coincidence about $5 \cdot 10^{-7}$ s.

Such an efficiency value represents, however, a limit inferior to the true one, since the side showers produced an apparent inefficiency. In our case we hold that 1% of inefficiency may be attributed to a cause of this nature, rather than to a real inefficiency.

In order to measure the minimum height of the counter pulses, the three to fourfold rate as a function of the bias of the integral discriminator, placed on the scintillation counter channel after a proportional amplifier, was determined.

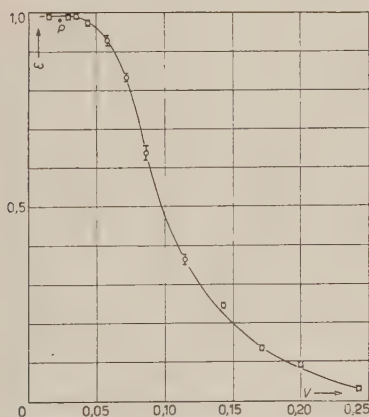


Fig. 6.

The result obtained is shown in Fig. 6. Point *P* on the curve corresponds instead to the measurement made without lead. As can be seen, the efficiency without a screen is lowered to about 98%, which justifies the affirmation that 1% of inefficiency may be attributed to side showers.

The curve in Fig. 6 shows the integral pulses of the photomultiplier, due to particles collimated by the GM-counter telescope. It is noted that the maximum efficiency is obtained with a height not superior to about 0.03 V.

Bearing in mind that light collection was

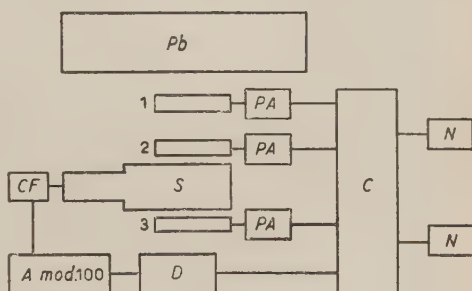


Fig. 5.

(³) G. A. MORTON: *RCA Rev.*, **10**, 525 (1949).

imentally, considering also the statistical fluctuations in the minimum energy loss ⁽⁴⁾ (1.8 MeV/g/cm²).

In conclusion, the measurements obtained show that the area which is effectively sensible corresponds to the geometrical area of the counter. In fact, even if the zone explored had a surface of 4×6 cm² round the centre of the counter, the form of the curve of light collection at the edges does not prejudice efficiency; the points of maximum disuniformity refer to positive differences in respect to the central area, which leads to an increase in the pulses. For all these characteristics, the counter proves useful in cases where well-defined geometry and a high-resolving power and minimum thickness of the counter are required.

Thanks are due to Mr. A. COLLINA for his construction of the counter, and Mr. A. MICHELINI for help given in the measurements made.

APPENDIX

It is required to calculate the percentage of the luminous flux which remains entrapped in a transparent cylindrical body, having a refraction index n and radius r , when the source is in point form and placed inside it.

The entrapped light is due to:

- 1) a constant contribution independent of the source position;
- 2) a contribution which varies with the source position.

Given the distance d of the source from the cylinder axis, a generic ray emitted at point P , where the source is placed, is fixed by the angles φ and θ (Fig. 2).

The first angle is that made by the ray with the plane π passing through P and perpendicular to the cylinder axis; the second is the angle made by the plane ω containing the luminous ray and perpendicular to π with the plane λ passing through P and containing the cylinder axis.

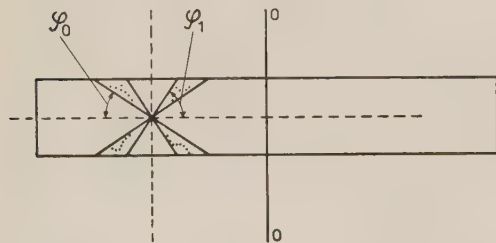


Fig. 7.

⁽⁴⁾ T. BOWEN and F. X. ROSER: *Phys. Rev.*, **85**, 992 (1952); R. BASKIN and J. R. WINCKLER: *Phys. Rev.*, **92**, 454 (1953); T. E. GRAUSHAW: *Progress in Nuclear Physics* (vol. 2), p. 271.

The contribution 1) is that due to the rays which have the angle φ between φ_0 and φ_1 (see Fig. 7), which satisfy the equations

$$\sin \varphi_0 = \frac{1}{n}; \quad \cos \varphi_1 = \frac{1}{n}.$$

This is true because the rays having these values of φ fall independently of d and θ on the surface of the cylinder with angles greater than the critical one. The value of the solid angle where these rays are included is obviously

$$\omega_0 = 4\pi \frac{\sqrt{n^2 - 1} - 1}{n}.$$

If we assume that $n = 1.5$, the percentage of light which remains entrapped is 7.87%. When $n < \sqrt{2}$ this contribution is nul.

To calculate contribution 2) it is necessary to know the value of φ because when a ray leaves P , it undergoes a first total reflection and falls thereafter on the surface at angles still greater than the critical one. This can never happen if $\varphi > \varphi_1$. In fact, the critical angle being $(\pi/2) - \varphi_1$, the rays go out whether they are incident on the cylinder bases before or after total reflexions on the side walls. A part only of the rays which made the angle $\varphi < \varphi_0$ will remain entrapped, since, when P departs from the cylinder axis, the angle of incidence on the side walls can become greater than the critical angle.

Applying the sinus theorem (Fig. 8) to the triangle DCP , eliminating $\sin \delta$ and holding that the angle α is equal to the critical angle, we find the angle φ which fixes the rays coming from P and incident on the surface of the cylinder with the critical angle. The value of this angle satisfies the equation

$$\cos \varphi_2 = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

where k is equal to d/r .

For this reason the rays with $\varphi_2 < \varphi < \varphi_0$ are incident with angles greater than the critical angle and remain entrapped. The solid angle defined by the preceding condition is given by

$$\Omega = 4 \int_0^{\pi} \int_{\varphi_2}^{\varphi_0} \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta = 4 \left\{ \frac{\pi}{n} - \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{(1/n^2) - k^2 \sin^2 \theta}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \, d\theta \right\}.$$

The calculation of the percentage of light entrapped, for different distances,

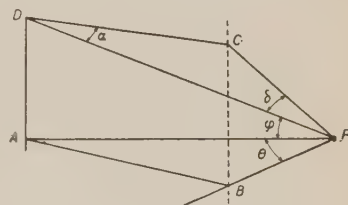


Fig. 8.

reported in Table I, has been carried out with numerical integrations in the particular case where $n = 1.5$.

TABLE I.

$k = d/r$	0	0.33	0.66	0.834
%	7.9	12	28	38

RIASSUNTO (*)

Il lavoro descrive un contatore a scintillazione a liquido di piccolo spessore (1 cm) e di sezione circolare (10 cm di diametro). Le misure eseguite hanno dimostrato che la sua efficienza alla rivelazione di particelle relativistiche è praticamente del 100%, e che il suo diametro reale corrisponde a quello geometrico. Le misure permettono di concludere che la luce raccolta è circa il 30% di quella emessa nella scintillazione, con una disuniformità nella raccolta della luce non superiore al 30%.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Isotopenzusammensetzung und Radioaktivität von rezentem Vesuvblei.

F. BEGEMANN, J. GEISS, F. G. HOUTERMANS

Physikalisches Institut der Universität - Bern

W. BUSER

Anorganisch-Chemisches Institut der Universität - Bern

(ricevuto il 16 Aprile 1954)

Zusammenfassung. — Das Blei aus drei Cotunnitproben vom Vesuv wurde radioaktiv und massenspektrometrisch untersucht. Die Radioaktivität wurde als zum RaD und seinen Folgeprodukten gehörig identifiziert und ergab — auf den Auffindungszeitpunkt extrapoliert — $21,2 \pm 0,5$ Zerfälle/s·mg Blei. Das Cotunnitblei läßt sich als ein bisher unbekannter «intermediärer» Bleityp auffassen, der zu etwa 0,7% aus radiogenem Zerfallsblei und im übrigen aus rezentem «gewöhnlichem Blei» besteht. Das Zerfallsblei entstammt einem «Urankonzentrat», dessen Maximalalter sich nach der RaD-Methode zu $17 \cdot 10^6$ a ermitteln ließ. Die Isotopenzusammensetzung (vgl. Tab. I) zeigt eine ähnliche Anomalie wie die der Bleierzlagerstätten von Joplin, Sudbury u.a. Es wird ein Modell für den Entstehungsmechanismus dieser «J-Typen» angegeben.

1. — Einleitung.

Für die Frage der Bildung von Bleimineralien und für die Theorie des «gewöhnlichen Bleis» ist es von besonderem Interesse, die Isotopenzusammensetzung eines Bleiminerals zu messen, dessen rezente Bildung aus einem definierten Magma sichergestellt ist. Als solches bot sich Cotunnit, ein Sublimationsprodukt vulkanischer Fumarolen. Uns standen 3 Cotunnit-Proben vom Vesuv zur Verfügung. Diese zeigten eine gut meßbare Radioaktivität, wie sie für dieses Mineral schon von ZAMBONINI [Za 07] festgestellt worden war.

2. – Messungen.

Die drei genannten Proben wurden zu verschiedenen Zeiten an drei verschiedenen Orten am Vesuv gefunden (vgl. Tabelle I). Der schön kristallisierte, rein weiße Cotunnit ließ sich gut mechanisch vom roten Tuffstein ablösen. Von jeder Probe standen einige hundert mg zur Verfügung. Debye-Scherrer-Aufnahmen der drei Proben zeigten völlige Identität mit dem Diagramm von synthetischem PbCl_2 . Die chemische Analyse ergab, daß es sich bei den vorliegenden Cotunnitproben um sehr reines PbCl_2 handelte. (Der stöchiometrische Bleigehalt beträgt 74,5%, gefunden wurden 74,4%).

Zur Untersuchung wurden etwa 100 mg jeder Probe aufgelöst, Beimengungen des Trägermaterials abfiltriert und aus der Lösung das Blei als Sulfid gefällt. Dieses diente als Ausgangsmaterial für die massenspektrometrische Untersuchung und für die Aktivitätsbestimmung. Auf diese Weise wurde erreicht, daß die Bestimmung der Isotopenverhältnisse und die radioaktiven Messungen an genau gleichem Material durchgeführt wurden, da beim unveränderten natürlichen Mineral mit der Möglichkeit zu rechnen war, an verschiedenen Stellen des Sublimats oder selbst innerhalb einzelner Kristalle Unterschiede der Radioaktivität oder der Bleiisotopenverhältnisse zu finden. Die spezifische Aktivität würde z.B. variieren, wenn die Dauer der Sublimatbildung vergleichbar mit der Halbwertszeit des RaD wäre.

Die Bleiisotopenverhältnisse wurden mit einem einfach-fokussierenden Massenspektrometer mit 60°-Sektorfeld und Elektronenstoß-Ionenquelle gemessen. Das Massenspektrometer wird a. a. O. [Eh 54] genauer beschrieben. Das Bleisulfid wird aus einem Ofen bei ca. 300-400 °C verdampft und die Isotopenverhältnisse des Bleies durch Messung der Ionenströme der Pb^+ - und PbS^+ -Ionen bestimmt [Eh 53, Gei 54]. Die Ergebnisse der Messungen sind in Tabelle I zusammengestellt, die Isotopenverhältnisse für die drei Cotunnite sind innerhalb der Fehlergrenzen gleich.

TABELLE I.

Probe	Funddatum	$\alpha = \frac{\text{Pb}^{206}}{\text{Pb}^{204}}$	$\beta = \frac{\text{Pb}^{207}}{\text{Pb}^{204}}$	$\gamma = \frac{\text{Pb}^{208}}{\text{Pb}^{204}}$
Cotunnit A . . .	12.8.52	19,08	15,71	39,24
Cotunnit B . . .	3.7.49	19,14	15,75	39,37
Cotunnit C . . .	24.8.52	19,19	15,80	39,62

Da die Vermutung nahe lag, daß der größte Teil der Radioaktivität vom RaD(Pb^{210}) und seinen Folgeprodukten herrührt [Ro 07], wurde eine quan-

titative Abtrennung des Bleis von allen anderen Elementen nach der Dithizon-Methode vorgenommen (*). Die Aktivität der Bleifractionen wurde in Becherzählrohren durch Vergleich mit einer RaD-Standard-Lösung [Be 52] bestimmt. (Gemessen wird in beiden Fällen die β -Strahlung des RaE).

Der Bleigehalt der Lösungen wurde gravimetrisch als PbSO_4 bestimmt. Die Ergebnisse der Aktivitätsmessungen und der Bleibestimmungen zeigt Tabelle II.

TABELLE II.

Probe	Fund- datum	Pb-Gehalt der Lösung (mg/cm ³)	Zerfälle	Zerfälle	mg Th-Äquivalent Tn mg Pb
			s · mg Pb (März 54)	s · mg Pb (extrapol. auf Funddatum)	
Cot. A	12.8.52	1,720	20,5	21,6 ± 0,5	} < 10 ⁻⁴
Cot. B	3.7.49	1,212	18,4	21,4 ± 0,5	
Cot. C	24.8.52	1.163	19,7	20,7 ± 0,5	

Schon die Untersuchung der bleifreien Fraktion nach der Dithizonaus-schüttelung ergab, daß bei allen drei Cotunniten mehr als 99% der gesamten β -Aktivität dem RaD und seinen Folgeprodukten zuzuschreiben sind. Darüber hinaus wurden die Cotunnit-Lösungen in einer speziellen Proportional-Zähl-rohrapparatur, mit der die Tn- und Rn-Aktivitäten getrennt gemessen werden können auf ihren Gehalt an RdTh bzw. Ra untersucht (Einzelheiten der Meß-anordnung sowie die genauen Resultate siehe [Be 54]). Die vorläufigen Er-gebnisse sind ebenfalls in Tabelle II aufgeführt.

3. – Diskussion der Ergebnisse.

Sämtliche bisher untersuchten Typen von natürlichem Blei lassen sich entweder dem Typus des «gewöhnlichen Bleis» oder dem des «radiogenen Bleis» zuordnen. Der erstere Typus ist dadurch charakterisiert, daß sein gegen-wärtiger Uran- und Thoriumgehalt von verschwindender Größenordnung ist und keinesfalls für das Vorhandensein eines nennenswerten Anteils der Blei-isotope Pb^{206} , Pb^{207} und Pb^{208} verantwortlich gemacht werden kann. Nach dem von verschiedenen Autoren [Ger 42, Hol 46, Hou 46, Bu 49, Co 52] gege-benen Modell der Entwicklung von Bleimineralien lassen sich diese auffassen

(*) Vgl. z.B. F. J. WELCHER: *Organic Analytical Reagents*, Vol. 3.

als ein Gemisch aus einem « Urblei » einer zur Zeit der Bildung der Erdkruste gegebenen Isotopenzusammensetzung und Zerfallsblei, das in der Zeit von der Differenzierung der Erdkruste bis zur Bildung des Bleiminerals aus Uran und Thorium entstanden ist.

Radiogenes Blei, das bisher ausschließlich in Uran- und Thoriummineralien oder in engster Assoziation mit diesen gefunden wurde, besteht vorwiegend aus den durch radioaktiven Zerfall entstandenen Isotopen Pb^{206} , Pb^{207} und Pb^{208} , kann aber einen mehr oder minder großen Anteil an sog. « accessorischen Blei » enthalten, dessen Isotopenzusammensetzung einem « gewöhnlichen » entspricht. In dem hier untersuchten Cotunnit haben wir es offensichtlich mit einem neuen « intermediären » Bleitypus zu tun, der durch seinen RaD-Gehalt seine recente Bildung beweist. Überdies zeigt die noch vorhandene Aktivität

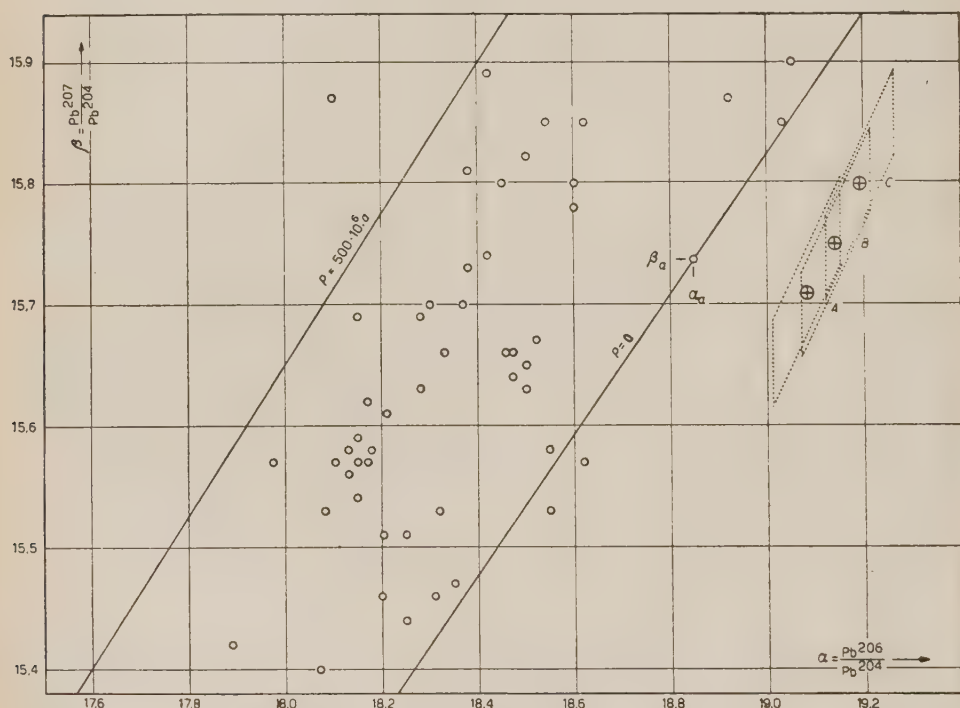


Fig. 1 zeigt einen Ausschnitt des α - β -Diagramms für « gewöhnliches Blei ». Eingezeichnet sind die Isotopenverhältnisse aller bisher gemessenen [Ni 38, Vi 52, Eh 53, Gei 54, Eb 54] europäischen Proben von « gewöhnlichem Blei », mit Ausnahme solcher, deren Isotopenverhältnisse außerhalb dieses Diagrammausschnittes liegen. Diese Proben haben jedoch alle ein « Modellalter » p von mehr als $700 \cdot 10^6$ a. Die Werte (\oplus) A, B, C geben die Isotopenverhältnisse der drei Cotunnitproben wieder, die Parallelogramme zeigen die Fehlergrenzen der massenspektrometrischen Messungen. (Die Form dieser Fehlergrenzen ist bedingt durch die kleinere Meßgenauigkeit des Pb^{204}). Eingezeichnet sind außerdem die Isochrone für ein « Modellalter » von $500 \cdot 10^6$ a und die rezente Isochrone.

des RaD, daß dieses Blei noch vor einer mit der Halbwertszeit des RaD vergleichbaren Zeit mit Uran oder einem seiner langlebigen Folgeprodukte aufs engste assoziiert war.

Andererseits würde ein Blei der gefundenen Isotopenzusammensetzung — wäre nur diese bekannt — als ein «gewöhnliches Blei» erscheinen, dessen Isotopenhäufigkeiten freilich ein wenig von denen anderer junger — speziell europäischer — Bleisorten abweichen. Auf diesen Punkt soll weiter unten noch ausführlich eingegangen werden.

Infolge seines intermediären Charakters kann also das hier vorliegende Blei von zwei Seiten her aufgefaßt werden: einmal als ein durch natürliche Vorgänge separiertes radiogenes Blei, das einen großen Anteil accessorischen Bleis enthält, zum andern als ein in seiner Isotopenzusammensetzung von den üblichen europäischen Typen ein wenig abweichendes «gewöhnliches Blei» (vgl. Fig. 1).

Diskutieren wir zunächst die erste Auffassung des Cotunnits als radiogenes Blei, so ist die wichtige Frage nach der Geschichte des Bleies in den letzten Jahrzehnten vor der Auffindung zu beantworten. Bekannt ist der Zeitpunkt der Auffindung und damit auch der des Aufhörens der Nachentstehung. Als obere Grenze für das Alter der Kristalle kann jedenfalls der Zeitpunkt der Erstarrung der Lava, bzw. der der Entstehung der Tuffschicht, angenommen werden, auf welchen sich die Kristalle gebildet haben. Maßgebend für die hier im wesentlichen interessierende spezifische Anfangsaktivität, d.h. für das anfängliche Verhältnis des RaD zum Gesamtblei ist der Zeitpunkt der Separation des RaD von seinen langlebigen Muttersubstanzen. Hierbei kommen infrage die Abtrennung des RaD vom Ra, des Ra vom Io und schließlich die des Io vom Uran. Die Frage, ob und um wieviel sich diese Zeitpunkte voneinander unterscheiden, wird durch detaillierte radioaktive Untersuchungen der verschiedenen Sublimationsprodukte der Fumarolen mit verschiedenen Entstehungsdaten zu entscheiden sein. Es handelt sich hier um einen extremen Fall von radioaktivem Nichtgleichgewicht, und die Tatsache, daß in den natürlichen Zerfallsreihen Folgeprodukte sehr verschiedener Halbwertszeiten existieren, verspricht mittels langwieriger radiochemischer Untersuchungen interessante Rückschlüsse auf den Mechanismus und den zeitlichen Ablauf vulkanischer Vorgänge ziehen zu können. Leider sind seit der Auffindung der untersuchten Proben schon einige Jahre vergangen, sodaß das laufende Po^{210} -Gleichgewicht nahezu erreicht ist und eine Feststellung des Kristallisationsdatums aus dem Anwachsen des Po^{210} heute nur mehr ungenau möglich ist.

Vergleicht man die in Tabelle II angegebenen spezifischen Aktivitäten miteinander, so zeigt sich immerhin, daß diese — umgerechnet auf den Auffindungszeitpunkt — innerhalb der Fehlergrenzen gleichen Wert haben. (Hierbei ist zu bedenken, daß die Differenz der am weitesten auseinanderliegenden Auffindungszeitpunkte nur etwas mehr als drei Jahre ausmacht, was einem Ab-

fall der RaD-Aktivität von nur etwa 10 % entspricht). Wenngleich eine Nachprüfung dieses Ergebnisses an Proben mit genau definierten und möglichst weit auseinanderliegenden Bildungszeitpunkten erforderlich ist, so ist dieser Befund nicht im Widerspruch mit der Hypothese, daß der Auffindungszeitpunkt, der Bildungszeitpunkt und der Zeitpunkt der Abtrennung des RaD vom Ra nur um eine Zeitspanne auseinanderliegen, die klein ist im Vergleich zu der Differenz der Auffindungszeitpunkte von drei Jahren.

Das Cotunnit-Blei läßt sich als ein radiogenes Blei auffassen, das aus einem « Urankonzentrat » stammt, für welches sich nach der RaD-Methode [Hou 51, Be 53] ein Maximalalter angeben läßt. Eine solche Altersbestimmung erlaubt jedenfalls nur, einen Maximalwert für das Alter des im Vesuvmagma vorhandenen « Urankonzentrats » anzugeben, da nicht bekannt ist, ob der Zeitpunkt der Abtrennung des RaD-+RaG vom Ra mit der Störung des Gleichgewichts der Elemente vom Uran bis zum RaD zusammenfällt, und nur die spezifische Aktivität zum Auffindungszeitpunkt der Altersbestimmung zugrundegelegt werden kann. Die Berechnung dieses Maximalalters beruht auf der Tatsache, daß bei der Mitnahme des RaD durch den zur Cotunnitbildung führenden Sublimationsvorgang mit Sicherheit auch RaG in einem Verhältnis zu RaD mitgenommen worden ist, wie es in dem « Urankonzentrat » zum Zeitpunkt dieser Abtrennung des Bleis vorhanden war. Die Bestimmung dieses Maximalalters wird naturgemäß sehr ungenau, da im Gegensatz zu allen anderen bekannten Fällen radiogener Bleisorten, für welche das Verhältnis des accessorischen Bleis zum Gesamtlei höchstens ca. 20-30 % ist, hier durch das Vorhandensein accessorischen Bleis in Höhe von über 99 % (*) eine genaue Kenntnis der Isotopenzusammensetzung des accessorischen Bleis erforderlich ist, um die zum RaD gehörige Menge RaG berechnen zu können. Die sonst für ein thoriumfreies Uranmineral übliche Methode, unter den fraglichen Werten für das Verhältnis $\alpha = (\text{Pb}^{206})/(\text{Pb}^{204})$ des accessorischen Bleis einen Anhaltspunkt aus dem Verhältnis $\gamma = (\text{Pb}^{208})/(\text{Pb}^{204})$ zu gewinnen, versagt hier, da der ursprüngliche ThB-Gehalt der Cotunnite und damit der Th-Gehalt des « Urankonzentrats » nicht bekannt ist. Auch die naheliegende Methode, aus Unterschieden der Isotopenzusammensetzung durch verschiedene spezifische Aktivität und damit verschiedene Anteile an accessorischem Blei dessen Wert von α zu ermitteln, läßt sich hier nicht anwenden, da die bisher gemessenen Werte von α innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmen. Jedoch zeigen die gefundenen Werte von α und $\beta = (\text{Pb}^{207})/(\text{Pb}^{204})$ der Cotunnite nur eine so geringe Abweichung von denen der bekannten jungen europäischen Bleitypen, daß ohne weiteres ersichtlich ist, daß nur ein geringer Prozentsatz, nämlich

(*) A. PIUTTI und D. MIGLIACCI [Pi 22] fanden Abweichungen des Atomgewichtes des Cotunnitbleis von dem gewöhnlicher Bleie und schlossen auf eine Beimengung von Uranblei (uraniopiombo) zu gewöhnlichem Blei in Höhe von 12%.

höchstens 4% der gefundenen Menge Pb^{206} aus dem « Urankonzentrat » stammendes RaG sein kann, d.h. daß das fragliche « Urankonzentrat » ein Alter von höchstens $50 \cdot 10^6$ a haben kann. Da für junge radiogene Bleisorten das Verhältnis AcD/RaG praktisch gleich 4,6% ist, haben wir zur genaueren Berechnung des Alters ein accessorisches Blei mit den Isotopenverhältnissen $\alpha_a = 18,85$, $\beta_a = 15,74$ verwendet. Diese ergeben sich als Schnittpunkt einer durch die α - β -Werte des Cotunnit B gezogenen Geraden mit einer Neigung von 4,6% und der rezenten Isochrone des in [Hou 53] gegebenen Isochronensystems (vgl. Fig. 1). Damit erhält man für das « Urankonzentrat » im Vesuv ein Maximalalter von $17 \cdot 10^6$ a (Entsprechend ergibt sich aus den Proben Cotunnit A bzw. Cotunnit C ein Maximalalter von 17 bzw. $14 \cdot 10^6$ a). Die hier benutzten Isotopenverhältnisse des accessorischen Bleis für ein Gesteinsblei des Alters $p = 0$ entsprechen einem Wert von $\mu = (\text{U}^{238})_{\text{heute}}/(\text{Pb}^{204}) \approx 9,7$, was durchaus den aus europäischen Bleisorten ermittelten μ -Werten für deren Muttergestein entspricht [Gei 54]. Diese Übereinstimmung in den μ -Werten bedingt, daß die Altersberechnung für das « Urankonzentrat » im Vesuv keineswegs von der speziellen Wahl des Isochronensystem abhängt, sondern daß eine Korrektur mit einem rezenten oder jungen europäischen « gewöhnlichen Blei » auf ein ähnliches Alter führt.

Betrachten wir nun das Cotunnit-Blei als ein « gewöhnliches Blei », als welches es dem Beobachter z.B. erschiene, wenn man es schon vor einigen hundert Jahren gefunden und erst heute untersucht hätte, so daß schon seine RaD-Aktivität vollständig abgeklungen wäre. Nur nach seiner Isotopenzusammensetzung beurteilt erscheint das Cotunnit-Blei als ein ausgesprochen « anormales » Blei, das demjenigen Typus zuzurechnen ist, für welchen das aus dem Isochronensystem [Hou 53, Gei 54] berechnete « Modellalter » geringer ist als das geologische Alter. Das « Modellalter » ergibt sich nämlich zu $p = -200 \cdot 10^6$ a. Das Auftreten solcher anormalen Typen von Bleierzen, wie wir sie z.B. in den Vorkommen von Joplin und am Colorado-Plateau und noch extremer in einigen der Bleiprobe von Sudbury kennen, ist vielfach diskutiert worden. Diese etwa als « J-Typen » zu bezeichnenden Vorkommen ließen es einigen Autoren [Je 48, Vi 52] überhaupt als zweifelhaft erscheinen, das erwähnte Bildungsmodell für Bleierze für die Berechnung des Erdalters zu verwenden. Es war eingewandt worden, daß zur Berechnung des Erdalters und der Isotopenzusammensetzung des « Urbleis » nicht alle analysierten Bleiprobe verwendet wurden. So ergibt sich z.B. nach diesem Modell für die Probe Worthington Mine, Sudbury (Ontario) [Co 52] ein Modellalter von $p = -4 \cdot 10^9$ a. Demgegenüber ist die Möglichkeit erörtert worden [Vi 52, Gei 54], daß Bleitypen scheinbar negativen Alters sich ohne weiteres durch eine Erhöhung des μ -Wertes im Muttergestein oder eine Mitnahme radiogenen Bleis bei der Ausscheidung erklären lassen. Durch die Analyse des heute noch RaD-haltigen Cotunnitbleis scheint uns diese Erklärung für das Zustande-

kommen anormaler Isotopenzusammensetzung des J-Typs, der hier gewissermassen im statu nascendi beobachtet wird, auf die erwähnte Art experimentell erwiesen, da sich aus dem RaD-Gehalt des Cotunnitbleis ein Wert von ca. $\mu = 110$ ergibt, während die Isotopenzusammensetzung zeigt, daß der Wert von μ während des größten Teils der Bildungsgeschichte dieses Bleis etwa 10 gewesen sein muß. Wir wollen damit keineswegs als bewiesen erachten, daß die geologisch-genetischen Bedingungen sonstiger anormaler Bleivorkommen des J-Typus eine besondere Analogie zu den hier vorliegenden Bedingungen zeigen, doch scheint uns auch für diese als Erklärung ein Anstieg des μ -Wertes im Muttergestein oder eine Mitnahme radiogenen Bleis nahezuliegen. Diese Auffassung wird dadurch gestützt, daß im Falle der Sudbury-Vorkommen außer der oben erwähnten anormalen Proben [Co 52 Nr. 25 und 26, Ru 54 Nr. 1, 2, 5, 6, 7, 9, 11 und 13] auch drei Proben [Ru 54 Nr. 3, 4 und 8] existieren, die als durchaus normal gelten können, da sich für diese «Modellalter» von 1800 bis $2000 \cdot 10^6$ a ergeben.

Auch im Falle der Proben gewöhnlichen Bleis vom Colorado-Plateau [Geo 54] scheinen ähnliche Verhältnisse insofern vorzuliegen, als auch hier Isotopenverhältnisse gemessen wurden, die von stark negativen «Modellaltern» bis zu solchen reichen (Nr. 6 und 7), für die das «Modellalter» mit dem geologischen Alter übereinstimmt. Im Falle des Joplin-Vorkommens zeigen alle gemessenen Proben negatives «Modellalter». Hier ist also das zugehörige Blei des «Normaltyps» nicht bekannt, doch fällt auch hier wie in den beiden anderen angeführten Fällen eine starke Streuung der Isotopenverhältnisse auf. Möglicherweise wird sich gerade die starke Dispersion der Isotopenverhältnisse eines Vorkommens als Kriterium für «anormale» Bleilager erweisen.

Zuletzt mögen noch einige Punkte unserer physikalischen Meßergebnisse hervorgehoben werden, die vielleicht eine gewisse allgemeinere Bedeutung für die Vulkanologie haben könnten. Der heutige μ -Wert der Muttersubstanz, aus dem die Cotunnite stammen, ergab sich experimentell zu $\mu = (U^{238})/(Pb^{204}) \geq 110$. Dies ist ein extrem hoher Wert, der weit über dem aller bekannten Eruptivgesteine liegt. Dieser Umstand hat uns dazu veranlaßt, oben von einem «Urankonzentrat» als der Muttersubstanz eines Teils des Cotunnitbleis zu sprechen. Zunächst kann hierbei keinesfalls behauptet werden, daß eine Erhöhung der absoluten Urankonzentration gegenüber der gewöhnlicher Gesteine vorliegt. Jede Erhöhung des chemischen Verhältnisses Uran/Blei muß in dem hier gebrauchten Sinne als Urankonzentration aufgefaßt werden, auch dann, wenn diese nur durch einen Bleiverlust zustande gekommen ist. Der Überschuß an Pb^{208} gegenüber «normalen» jungen europäischen Bleisorten läßt vermuten, daß eine der Urankonzentration vergleichbare Thoriumkonzentration stattgefunden hat. Eine exakte Deutung des Mechanismus, der die hier gefundene Erhöhung des μ -Wertes und damit des Verhältnisses Uran/Blei bewirkt, muß einer eingehenden geologisch-petrographischen Ana-

lyse der vulkanischen Vorgänge vorbehalten bleiben. Wir möchten im folgenden nur einige Modelle angeben, durch die das Zustandekommen des hohen μ -Wertes und der gegenüber anderen jungen europäischen Bleierzen erhöhten Anteile an Pb^{206} und Pb^{208} im Cotunnitblei zu erklären wäre.

Eine mögliche Deutung ist das Zusammentreffen von Gesteinsblei mit weniger als 1% radiogenem Blei aus Mineralanteilen, die Uran und Thorium in sehr viel höherem Maße enthalten als gewöhnliche Eruptivgesteine. In diesem Falle bedeutet der oben berechnete Wert von $17 \cdot 10^6$ a das Maximalalter der uran- und thoriumreichen Minerale.

Als andere Deutungsmöglichkeit für das Zustandekommen des hohen μ -Wertes und der gefundenen Isotopenzusammensetzung bietet sich die Annahme, daß der hohe μ -Wert durch eine Verarmung des Magmas an Blei bedingt ist. Das starke Auftreten von HCl in den Dämpfen der Fumarolen und das Auftreten von Chloriden in deren Sublimationsprodukten ergibt die Möglichkeit, daß wegen der leichten Verdampfbarkeit von PbCl_2 allmählich eine Bleiverarmung des Magmas eintritt. Eine Nachprüfung dieser Hypothese ließe sich durchführen, wenn eine Abschätzung der bei der Vulkantätigkeit abgegebenen Bleimenge möglich wäre. Auch ist von diesem Standpunkt aus das Studium der spezifischen Anfangsaktivität frischgebildeter Bleiverbindungen und anderer Sublimationsprodukte in ihrer zeitlichen Abhängigkeit von der Vulkantätigkeit von bedeutendem Interesse. Die Angabe des Maximalalters von $17 \cdot 10^6$ a für den radiogenen Anteil ist in diesem Falle ein Maß für die Zeit, seit der diese Bleiverarmungsvorgänge begonnen haben. Eine Erhöhung des μ -Wertes in dem beobachteten Maße könnte freilich auch als Folge von Ausbrüchen in jüngster Zeit eingetreten sein, doch würde dieser Mechanismus nicht die gemessene Erhöhung des Gehaltes an Pb^{206} im Blei erklären und macht die Annahme einer Dauer der genannten Vorgänge von der angegebenen Größenordnung erforderlich.

Schließlich läßt sich einwenden, daß der gemessene μ -Wert aus dem Verhältnis $\text{RaD}/\text{Pb}^{204}$ bestimmt wurde und damit nur das Verhältnis U^{238} -Äquivalent des $\text{RaD}/\text{Pb}^{204}$, nicht aber das direkt gemessene Verhältnis $\text{U}^{238}/\text{Pb}^{204}$ repräsentiert. Es wäre somit denkbar, daß die hohe RaD-Aktivität lediglich dadurch zustande kommt, daß die die Sublimationsprodukte erzeugenden Dämpfe Radon aus einer sehr großen Gesteinsmenge aufgenommen haben. So würde z.B. eine stark radonhaltige Quelle mit minimalem Bleigehalt gleichfalls ein sehr hohes Verhältnis $\text{RaD}/\text{Pb}^{204}$ aufweisen, wenn die Zeitdauer zwischen der Aufnahme der Emanation und dem Austritt der Quelle vergleichbar mit der Halbwertszeit des Radon ist. Diese Möglichkeit würde im Falle des Cotunnitbleis zwar das hohe Verhältnis $\text{RaD}/\text{Pb}^{204}$ erklären, nicht aber den aus der Isotopenzusammensetzung ermittelten Überschuß an Pb^{206} . Ein weiteres Argument gegen diese Auffassung ist der gemessene Überschuß an Pb^{208} im Vergleich zu anderen jungen europäischen Erzbleien, denn wegen

der kurzen Halbwertszeit des Thoron ist es besonders unwahrscheinlich, daß der erhöhte Gehalt des Cotunnits an Pb^{208} sich allein durch eine Mitnahme von Emanation erklären läßt.

Zum Schluß möchten wir unseren besonderen Dank für die Beschaffung der Cotunnite und für interessante Auskünfte über diese den Herren Dr. BEVILACQUA, Prof. IMBO und ganz besonders Prof. PARASCANDOLA, Neapel, der die Proben gesammelt hat, aussprechen.

Für anregende Diskussionen danken wir den Herren Dr. HÜGI, Bern, und Dr. PICCIOTTO, Brüssel.

Der Schweizerischen Kommission für Atomenergie danken wir für die Bereitstellung von Mitteln für die massenspektrometrischen und radioaktiven Messungen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [Be 52] F. BEGEMANN und F. G. HOUTERMANS: *Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss., Smn* **161**, 245 (1952).
- [Be 53] F. BEGEMANN, H. V. BUTTLAR, F. G. HOUTERMANS, N. ISAAC und E. PICCIOTTO: *Geochim. et Cosmochim. Acta*, **4**, 21 (1953).
- [Be 54] F. BEGEMANN: *Dissertation Bern* (1954).
- [Bu 49] E. C. BULLARD, und J. P. STANLEY: *Veröffentl. Finn. Geodät. Institut*, **36**, 33 (1949).
- [Co 52] C. B. COLLINS, R. M. FARQUHAR und R. D. RUSSELL: *Phys. Rev.*, **88**, 1275 (1952); *Canad. Journ. Phys.*, **31**, 402 (1953).
- [Eb 54] P. EBERHARDT und J. GEISS: *Helv. Phys. Acta*, (1954). Im Druck.
- [Eh 53] H. F. EHRENBURG: *Zeits. f. Phys.*, **134**, 317 (1953).
- [Eh 54] H. F. EHRENBURG, J. GEISS und R. TAUBERT: *Zeits. f. angewandte Physik* (1954). Im Druck.
- [Gei 54] J. GEISS: *Zeits. f. Naturf.*, **9a**, 218 (1954).
- [Geo 54] GEOLOGICAL SURVEY, USA: *Analysen von Carbide and Carbon Chemical Co.*, Y-12 Plant, Oak Ridge, Tenn. Veröffentlicht in *Nuclear Geology*, herausgegeben von HENRY FAUL, Denver, Colorado (1954).
- [Ger 42] S. K. GERLING: *Dokl. Acad. Nauk SSSR*, **34**, 282 (1942).
- [Hol 46] A. HOLMES: *Nature*, **157**, 680 (1946); **159**, 127 (1947).
- [Hou 46] F. G. HOUTERMANS: *Naturwissenschaft.* **33**, 185 (1946); *Zeits. f. Naturf.*, **2a**, 322 (1947).
- [Hou 51] F. G. HOUTERMANS: *Sitzungsber. Heidelberger Akad. d. Wiss. Math.-nat. Kl.*, **123** (1951).
- [Hou 53] F. G. HOUTERMANS: *Nuovo Cimento*, **10**, 1623 (1953).
- [Je 48] H. JEFFREYS: *Nature*, **162**, 822 (1948); **164**, 1046 (1949).
- [Ni 38] A. O. NIER: *Journ. Am. Chem. Soc.*, **60**, 1571 (1938).

- [Pi 22] A. PIUTTI und D. MIGLIACCI: *Rend. R. Accad. Sci. Fis. e Mat.*, **29**, 145 (1922).
- [Ro 07] P. ROSSI: *Rend. R. Accad. Lincei*, 630 (1907).
- [Ru 54] R. D. RUSSELL, R. M. FARQUHAR, G. L. CUMMING und J. T. WILSON: Im Druck (1954).
- [Vi 52] A. P. VINOGRADOV, K. SADOROSHNIJ, C. J. SYKOV: *Dokl. Akad. Nauk.*, **85**, 1107 (1952).
- [Za 07] F. ZAMBONINI: *Rend. R. Accad. Linc.*, 975 (1907).

RIASSUNTO (*)

Il piombo di tre campioni di Cotunnite del Vesuvio è stato esaminato per la sua radioattività e allo spettrometro di massa. La radioattività fu identificata come dipendente dal RaD e dai suoi prodotti di decadimento e risultò dopo estrapolazione al tempo di ritrovamento $21,2 \pm 0,5$ decadimenti/s·mg Pb. Il Piombo della Cotunnite è da ritenere un tipo «intermedio», finora sconosciuto, consistente per circa il 0,7% in piombo di decadimento radiogeno e per il resto in piombo «ordinario» recente. Il piombo di decadimento ha origine da un «concentrato di uranio» la cui antichità massima, col procedimento del metodo RaD, fu potuta fissare a $17 \cdot 10^6$ a. La composizione isotopica (v. Tab. I) rivela una anomalia simile a quella dei giacimenti piombiferi di Joplin, Sudbury, ecc.. Si propone un modello per il meccanismo di formazione di questi «Tipi J».

(*) Traduzione a cura della Redazione.

A Non-linear Generalization of the Schrödinger and Dirac Equations.

M. SCHÖNBERG

Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo (Brasil)

(ricevuto il 23 Aprile 1954)

Summary. — It is shown that it is possible to modify the Hamilton-Jacobi equation by the introduction of generalized potentials that lead to a modification of the total momentum, without introducing new forces. By means of the solutions of the modified Hamilton-Jacobi equations it is possible to describe the motions of more general classical ensembles of particles than those corresponding to the solutions of the ordinary Hamilton-Jacobi equation. The extension to quantum mechanics is straightforward and leads to a generalization of the Schrödinger equation by means of a system of non-linear equations. The same procedure leads to a generalization of the Dirac equation.

1. — The Schrödinger equation for a spinless particle of mass m and charge e moving in an electromagnetic field described by the potentials A_0 , \mathbf{A}

$$(1) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi + eA_0 \Psi,$$

corresponds to the classical Hamilton-Jacobi equation:

$$(2) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + eA_0 = 0.$$

Each solution of the Hamilton-Jacobi equation (2) defines a set of ∞^3 trajectories of the particle determined by the first order differential equations:

$$(3) \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \quad (\mathbf{v} = \text{velocity of the particle}).$$

This association can be rendered more pictorial, by considering an ensemble of identical particles distributed in space with a density (of points) $\varrho(t, \mathbf{x})$ satisfying the partial differential equation:

$$(4) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \left\{ \frac{\varrho}{m} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right\} = 0.$$

Thus we get a kind of pressureless fluid, whose Euler equations are the Newton equations of motion of the particle and whose equation of continuity is (4). Each quantal state corresponds to a state of our pressureless fluid.

The motions of the pressureless fluid associated to the solutions S of the Hamilton-Jacobi equation are not the most general ones. This is seen more clearly when there is no magnetic field, since it follows from equation (3) that, in this case, the motion of the fluid is irrotational: $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$. When there is a magnetic field, there is still a restriction on the vorticity:

$$(5) \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\frac{e}{mc} \mathbf{H} \quad (\mathbf{H} = \text{magnetic field}).$$

In order to get the general motion of the fluid, we shall introduce Clebsch parameters:

$$(6) \quad m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}}.$$

It is easily seen that the Hamilton-Jacobi equation (2) can now be replaced by the system of three equations:

$$(7) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 + eA_0 = 0,$$

$$(8) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} = 0.$$

By differentiating both sides of (6) with respect to t , we get, as a consequence of (7) and (8), the equations of motion of the particle:

$$(9) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{H} \right) \quad (\mathbf{E} = \text{electric field}).$$

Equation (7) may be regarded as the Hamilton-Jacobi equation for a particle moving under the action of the electromagnetic field and an extra force \mathbf{f}

derived from the generalized potentials $\lambda(\partial\mu/\partial t)$ and $-\lambda(\partial\mu/\partial\mathbf{x})$:

$$(10) \quad \mathbf{f} = -\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left(\lambda\frac{\partial\mu}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda\frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{x}}\right) - \mathbf{v} \wedge \text{rot}\left(\lambda\frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{x}}\right).$$

In such a condition, the total momentum is given by the following equation

$$(11) \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A} - \lambda\frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial S}{\partial\mathbf{x}},$$

which replaces (3). Equation (11) is obviously equivalent to (6). It is easily seen that

$$(12) \quad \mathbf{f} = \frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{x}}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{x}}\right) - \frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{x}}\left(\frac{\partial\mu}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{x}}\right),$$

so that the force \mathbf{f} will vanish when λ and μ satisfy equations (8). Thus we get an explanation of (9). Equation (4) is now replaced by the following equation:

$$(13) \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\left\{\frac{\rho}{m}\left(\frac{\partial S}{\partial\mathbf{x}} - \frac{e}{c}\mathbf{A} + \lambda\frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{x}}\right)\right\} = 0.$$

It is interesting to notice that equations (7), (8) and (13) can be derived from a variational principle:

$$(14) \quad \delta \int \rho \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + \lambda \frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial\mathbf{x}} - \frac{e}{c}\mathbf{A} + \lambda \frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{x}} \right)^2 + eA_0 \right\} dt d\mathbf{x} = 0.$$

2. - We shall now discuss a generalization of the Schrödinger equation which corresponds to the above generalization of the Hamilton-Jacobi equation. The Schrödinger equation (1) can be derived from the well known variational principle:

$$(15) \quad \delta \int \left\{ i\hbar\Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{1}{2m} \Psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \Psi - eA_0\Psi^*\Psi \right\} dt d\mathbf{x} = 0.$$

We shall now consider the Schrödinger variational principle for a particle which is under the action of an electromagnetic field and of a force derived from the generalized potential $\lambda(\partial\mu/\partial t)$ and $-\lambda(\partial\mu/\partial\mathbf{x})$:

$$(16) \quad \delta \int \left\{ i\hbar\Psi^* \frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{1}{2m} \Psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} - \frac{e}{c}\mathbf{A} + \lambda \frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{x}} \right)^2 \Psi - \left(eA_0 + \lambda \frac{\partial\mu}{\partial t} \right) \Psi^*\Psi \right\} dt d\mathbf{x} = 0.$$

By varying only Ψ^* and Ψ we get the equations:

$$(17) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 \Psi + \left(eA_0 + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) \Psi,$$

$$(17a) \quad -i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} - \lambda \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 \Psi^* + \left(eA_0 + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) \Psi^*.$$

By varying λ and μ , we get from (16) two more equations:

$$(18) \quad \varrho \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\lambda \varrho) + \operatorname{div} (\lambda \mathbf{j}) = 0,$$

$$(19) \quad \begin{cases} \varrho = \Psi^* \Psi, \\ \mathbf{j} = \frac{1}{2m} \left\{ \Psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right) \Psi - \Psi \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} - \lambda \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right) \Psi^* \right\}. \end{cases}$$

It follows from (17) and (17a) that:

$$(20) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

By means of (20), we can transform the equations (18), as follows:

$$(21) \quad \varrho \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\mu \varrho) + \operatorname{div} (\mu \mathbf{j}) = 0.$$

The first equation (18) and the first equation (21) correspond to the two classical equations (8). The analogy with the classical theory of section 1 becomes even clearer by putting in evidence the amplitude R and the phase S/\hbar of Ψ :

$$(22) \quad \Psi = R \exp \left[\frac{i}{\hbar} S \right].$$

We have

$$(23) \quad \varrho = R^2, \quad \mathbf{j} = \varrho \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right),$$

and equation (17) can be replaced by the system:

$$(24) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 + eA_0 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta R}{R} = 0,$$

$$(25) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \left\{ \frac{\varrho}{m} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right) \right\} = 0.$$

The equations for λ and μ can be written as follows:

$$(26) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} = 0.$$

The only difference between the above equations and those of section 1 arises from the term $-(\hbar^2/2m)(\Delta R/R)$ in the left hand side of (24). This term vanishes in the classical limit.

It is interesting to notice that the second equation (18) and the second equation (21) express the conservation of quantities whose spatial densities are $\lambda \varrho$ and $\mu \varrho$, the current densities being $\lambda \mathbf{j}$ and $\mu \mathbf{j}$, respectively. A similar circumstance appears in the classical theory, because it is possible to replace the equations (8) by others similar to the second equation (18) and the second equation (21). Moreover any function F of λ and μ satisfies the equation $(\partial/\partial t)(F\varrho) + \text{div}(F\mathbf{j}) = 0$, so that:

$$(27) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda, \mu) \varrho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

It follows from equations (19) that ϱ and \mathbf{j} are multiplied by a factor $|a|^2$ when Ψ is replaced by $a\Psi$, a being an arbitrary constant. Therefore \mathbf{v} remains constant and the equations for λ and μ are not changed. We may say that the sets Ψ , λ , μ and $a\Psi$, λ , μ describe the same condition of the particle. Ψ may be normalized as usual and $|\Psi|^2 d\mathbf{x}$ can be taken as the probability of finding a charge e in the element of volume $d\mathbf{x}$ at the point in consideration. This choice is actually required by the form of the interaction terms with the electromagnetic field. It corresponds also to the meaning of the classical density ϱ of section 1. The physical interpretation of λ and μ is still unknown.

3. - We shall now see that it is possible to find solutions of (17) and (18) by taking $\lambda = G(\mu)$, G being an arbitrary function. Indeed the function Ψ'

$$(28) \quad \Psi' = \Psi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{\mu_0}^{\mu} G(\mu) d\mu \right],$$

satisfies the usual Schrödinger equation (1). Since ϱ and \mathbf{j} can be expressed in terms of Ψ' and Ψ'^* only, the determination of μ depends on the solution of a linear partial differential equation of the first order, whose coefficients are known, once (1) is solved. The generalization of the Schrödinger equation corresponding to $\lambda = G(\mu)$ appears as trivial, being essentially equivalent to a gauge transformation of the potentials A_0 , \mathbf{A} .

We shall now prove that λ and μ are independent when η

$$(29) \quad \eta = \operatorname{rot} \left(\mathbf{v} + \frac{e}{mc} \mathbf{A} \right) = \frac{1}{m} \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{x}} \wedge \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}},$$

is not 0 everywhere in space, and only in this case. Indeed, it follows from the form of the third member of (29) that λ is a function G of μ and t , when $\eta = 0$. By taking into account that λ is a solution of the first equation (21), we get:

$$(30) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial \mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right) = \frac{\partial G}{\partial t} = 0.$$

It is easily seen that:

$$(31) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \wedge \eta).$$

Therefore, a necessary and sufficient condition for η to vanish everywhere for all t is that $\eta(t_0, \mathbf{x}) = 0$ for all \mathbf{x} , at some instant of time t_0 .

It follows from (23), (17) and (18) that:

$$(32) \quad m \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{v} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{H} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{\Delta R}{R}.$$

This equation corresponds to the classical equation (9). It has the same form both for the Schrödinger equation and for the above generalization of the Schrödinger equation. By considering the solutions of the differential equation

$$(33) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}),$$

we get a family of mappings of the space into itself, in which the points $\mathbf{x}(t)$ correspond, for different values of t , to the point $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$. This flow conserves the measure $\int_{\Omega(t)} \varrho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$ of the measurable sets $\Omega(t)$, as a consequence

of (20). It has also some other properties, that are very similar to these of the motion of an inviscid barotropic charged fluid, whose charge and mass densities have everywhere the ratio e/m . These properties can be proven by modifying very slightly the proof of the corresponding hydrodynamic theorems. Thus we get the Cauchy equation

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta(t, \mathbf{x}) \\ \varrho(t, \mathbf{x}) \end{array} \right\} = \left\{ \frac{\eta(0, \mathbf{x}_0)}{\varrho(0, \mathbf{x}_0)} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \right\} \mathbf{x},$$

which expresses the vector $\boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{x})$ in terms of the vector $\boldsymbol{\eta}(0, \mathbf{x}_0)$, \mathbf{x}_0 being the point which is mapped on \mathbf{x} at the time t . The well known Helmholtz vortex theorems have their analogues in our flow. The vortex lines are here replaced by $\boldsymbol{\eta}$ -lines, tangent at all their points to the respective $\boldsymbol{\eta}$ vectors at an instant of time, and the vortex tubes by $\boldsymbol{\eta}$ tubes.

The equations (17) and (18) may be replaced by (32) and $(\partial \varrho / \partial t) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0$. In order to get the ordinary Schrödinger equation we must impose the supplementary condition $\boldsymbol{\eta} = 0$. This way of writing the equations of our generalization of the Schrödinger theory has the advantage of showing that the above treatment of the Clebsch parameters is not the most general one, since from those equations and the third equation (23) it does not follow that Ψ , λ and μ satisfy necessarily equations (17) and (18). It can be shown that the most general choice of the Clebsch parameters leads to the following equations

$$(35) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 \Psi + \left(eA_0 + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial t} - K(t, \lambda, \mu) \right) \Psi = 0,$$

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{1}{m} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right) = -\frac{\partial K}{\partial \mu}, \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{1}{m} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right) = \frac{\partial K}{\partial \lambda}. \end{cases}$$

$K(t, \lambda, \mu)$ being an arbitrary function of t , λ and μ . The equations (35) and (36) can be derived from the following variational principle:

$$(37) \quad \delta \int \left\{ i\hbar \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{2m} \Psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 \Psi - \right. \\ \left. - \left(eA_0 + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial t} - K(t, \lambda, \mu) \right) \Psi^* \Psi \right\} dt d\mathbf{x} = 0.$$

4. - The Dirac equation can be generalized by replacing the Dirac variational principle by the following principle:

$$(38) \quad \delta \int \left\{ i\hbar \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi^* c \boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right) \Psi - \right. \\ \left. - \Psi^* \beta m c^2 \Psi - \Psi^* \left(eA_0 + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) \Psi \right\} dt d\mathbf{x} = 0.$$

The equations for Ψ , λ and μ are now:

$$(39) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = c\alpha \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} \right) \Psi + \beta mc^2 \Psi + \left(eA_0 + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) \Psi = 0,$$

$$(40) \quad \varrho \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad \varrho \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{x}} = 0,$$

$$(41) \quad \varrho = \Psi^* \Psi, \quad \mathbf{j} = c\Psi^* \boldsymbol{\alpha} \Psi.$$

We have now also the three conservation equations:

$$(42) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\lambda \varrho) + \operatorname{div} (\lambda \mathbf{j}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\mu \varrho) + \operatorname{div} (\mu \mathbf{j}) = 0.$$

It is possible to generalize, in a different way, the Dirac equation by means of the following variational principle

$$(43) \quad \delta \int \left\{ \Psi^* i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi^* c\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} + \frac{\hbar}{2i} \left\{ \Phi^* \beta \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mathbf{x}} \beta \Phi \right\} \right) \Psi - \right. \\ \left. - mc^2 \Psi^* \beta \Psi - \Psi^* \left(eA_0 + \frac{\hbar}{2i} \left\{ \Phi^* \beta \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} \beta \Phi \right\} \right) \Psi \right\} dt d\mathbf{x} = 0,$$

in which both Ψ and Φ are four component spinors. The equations for Ψ and Φ are:

$$(44) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} + \frac{\hbar}{2i} \left\{ \Phi^* \beta \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mathbf{x}} \beta \Phi \right\} \right) \Psi + \\ + mc^2 \beta \Psi + \left(eA_0 + \frac{\hbar}{2i} \left\{ \Phi^* \beta \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} \beta \Phi \right\} \right) \Psi,$$

$$(45) \quad \left(\varrho \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \Phi = 0.$$

We have now the following conservation equations

$$(46) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_r \varrho) + \operatorname{div} (\Phi_r \mathbf{j}) = 0,$$

the Φ_r being the components of Φ .

The generalization of the Dirac equation corresponding to the variational principle (43) seems to be of a different nature than those involving the two scalars λ and μ . It is however possible to build with λ and μ a kind of wave

function Θ

$$(47) \quad \Theta = \sqrt{\lambda} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mu \right],$$

when λ is taken dimensionless. It is easily seen that:

$$(48) \quad \begin{cases} \lambda \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\hbar}{2i} \left(\Theta^* \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} \Theta \right), \\ \lambda \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\hbar}{2i} \left(\Theta^* \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\partial \Theta^*}{\partial x} \Theta \right). \end{cases}$$

Given a solution ψ of the ordinary Dirac equation, we can form a solution of the system (39)–(40) by taking

$$(49) \quad \Psi = \psi, \quad \lambda = \mu = 0$$

and a solution of the system (44)–(45) by taking:

$$(50) \quad \Psi = \psi, \quad \Phi = 0.$$

Thus it is seen that the generalized states described by Ψ, λ, μ or by Ψ, Φ include the ordinary states of the Dirac particle as particular cases.

A more detailed discussion of the generalized wave equations will be published later in this journal.

RIASSUNTO (*)

Si dimostra che è possibile modificare l'equazione di Hamilton-Jacobi introducendo dei potenziali generalizzati che conducono a una modificazione dell'impulso totale senza richiedere l'introduzione di nuove forze. Per mezzo delle soluzioni delle equazioni di Hamilton-Jacobi modificate è possibile descrivere i moti di un numero di insiemi generici di particelle classiche maggiore di quello corrispondente alle soluzioni dell'equazione ordinaria di Hamilton-Jacobi. L'estensione alla meccanica quantistica è immediata e porta a una generalizzazione dell'equazione di Schrödinger per mezzo di un sistema di equazioni non lineari. Lo stesso procedimento conduce a una generalizzazione dell'equazione di Dirac.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Energetic Nuclear Collisions in the Upper Atmosphere.

II. The Muon Component.

U. HABER-SCHAIM

Physikalisches Institut der Universität - Bern, Schweiz

G. YEKUTIELI

The Weizmann Institute of Science - Rehovoth, Israel

(ricevuto il 29 Aprile 1954)

Summary. — The flux of pions in the upper atmosphere calculated in Part I is used to determine the flux of muons in the atmosphere. In particular, the energy spectrum of muons at sea level in the energy band 30-1 000 Mc² is evaluated and compared with experiment.

In Part I of this paper ⁽¹⁾ the flux of charged pions in the upper atmosphere was calculated starting from a given spectrum of primary protons and α -particles. Here the flux of the muons created by the decay of pions is calculated down to sea level.

The transport equation for muons of energy between E and $E+dE$ at atmospheric pressure p is

$$(1) \quad \frac{\partial \mu^*(E, p)}{\partial p} = - \frac{1.1 \mu^*(E, p)}{Ep} + \frac{126 \pi^*(1.23 E, p)}{Ep}.$$

Here $1.1/Ep$ and $126/Ep$ are the mean free paths for decay of muons and pions respectively (E is expressed in nuclear mass units). Energy losses of muons due to ionisation in the atmosphere and the energy spread due to their angular distribution in the rest system of the pions are neglected.

⁽¹⁾ U. HABER-SCHAIM and G. YEKUTIELI: *Nuovo Cimento*, **11**, 172 (1954).

The solution of (1) is given by

$$(2) \quad \mu^*(E, p) = \frac{126}{E} p^{-1.1/E} \int_0^p t^{(1.1/E)-1} \pi^*(1.23 E, t) dt.$$

Following part I [eq. (13), (20)] we divide the total flux of pions π^* in two parts π and $\bar{\pi}$ initiated by primary protons and α -particles respectively:

$$(3) \quad \pi^*(E, p) = \pi(E, p) + \bar{\pi}(E, p) = \\ = \exp[-p/\lambda] \sum_{k=1}^{\infty} (p/\lambda)^k \pi_k(E) + \exp[-p/\lambda_\alpha] \sum_{k=1}^{\infty} (p/\lambda)^k \bar{\pi}_k(E),$$

where λ and λ_α are the collision mean free paths for nucleons and α -particles. Dividing the muon flux in a similar fashion:

$$(4) \quad \mu^*(E, p) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(E, p) + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mu}_k(E, p),$$

we find

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu_k(E, p) &= \frac{126 \pi_k(1.23 E)}{E} (p/\lambda)^{-1.1/E} \int_0^{p/\lambda} x^{(1.1/E)+k-1} e^{-x} dx, \\ \bar{\mu}_k(E, p) &= \left(\frac{\lambda_\alpha}{\lambda}\right)^k \frac{126 \bar{\pi}_k(1.23 E)}{E} \left(\frac{p}{\lambda_\alpha}\right)^{-1.1/E} \int_0^{p/\lambda_\alpha} x^{(1.1/E)+k-1} e^{-x} dx. \end{aligned} \right.$$

We approximate μ^* by

$$(4a) \quad \mu^*(E, p) = \sum_1^2 \mu_k(E, p) + \sum_1^4 \bar{\mu}_k(E, p) + r_\mu(E, p).$$

TABLE I.

E	R kg/cm ²	μ	M^*	M_{exp}^*	$2.1 \cdot M^*$
30	9.4	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$4.4 \cdot 10^{-4}$	$5.2 \cdot 10^{-4}$
50	16	$3.9 \cdot 10^{-6}$	$8.8 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$
100	31	$4.9 \cdot 10^{-6}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$3.8 \cdot 10^{-5}$	$3.8 \cdot 10^{-5}$
200	59	$3.3 \cdot 10^{-8}$	$3.2 \cdot 10^{-8}$	$8.6 \cdot 10^{-8}$	$6.7 \cdot 10^{-8}$
500	117	$1.6 \cdot 10^{-9}$	$3.2 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$6.7 \cdot 10^{-7}$
1000	180	$1.3 \cdot 10^{-8}$	$4.2 \cdot 10^{-8}$	$2.0 \cdot 10^{-7}$	$8.8 \cdot 10^{-8}$

By a calculation similar to that used in the appendices of Part I it can be shown that r_μ ($E > 30, p$) is less than 2.5% of the total flux μ^* . Table I summarises our results for the differential and integral fluxes at sea level.

The range in column two is taken from GEORGE ⁽²⁾ and the experimental values in column five from BARRET *et al.* ⁽³⁾.

Our calculated results given in columns three and four were obtained from a primary differential spectrum of protons aE^{-s} with $a = 0.57$ and $s = 2.56$ ⁽⁴⁾. Evidently the calculated values are too small.

The factor a enters throughout the calculation as a proportionality factor only. We think our model yields more reliable results for muons of energy about $E=100$; therefore by normalizing the calculated flux to the observed flux at that energy we find $a = 1.2$, i.e. an increase by a factor of 2.1 as compared to the old values. The corrected results given in column 6 are higher than the observed ones for $E < 100$ and lower for $E > 100$. This can be further corrected by a slight decrease in the exponent s . However the comparison between theory and experiment is strongly dependent on the range energy relation and since this relation has not yet been verified at our energies we shall not make any attempt to improve the agreement with experiment by changing the exponent of the primary spectrum.

The corresponding integral spectrum of protons is $0.77 \cdot E^{-1.56}$ and has a value of $1.66 \cdot 10^{-6}$ at 4800 Mc² as compared to $4 \cdot 10^{-6}$ given by KAPLON *et al.* ⁽⁵⁾.

In conclusion it seems that the nucleon-pion cascade described in Part I together with the above primary proton spectrum yields a muon spectrum comparable to the one obtained from experiments underground.

⁽²⁾ E. P. GEORGE: *Progress in Cosmic Ray Physics* (1952), p. 413.

⁽³⁾ P. H. BARRET, L. M. BOLLINGER, G. COCCONI, Y. EISENBERG and K. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **24**, 133 (1952).

⁽⁴⁾ This primary spectrum is based on older data of the muon flux underground which are considerably lower than those of BARRET *et al.* Compare U. HABER-SCHAIM: *Phys. Rev.*, **84**, 1199 (1951).

⁽⁵⁾ M. F. KAPLON, D. M. RITSON and E. P. WOODRUFF: *Phys. Rev.*, **85**, 933 (1952).

RIASSUNTO (*)

Il flusso dei pioni nell'atmosfera superiore calcolato nella Parte I si utilizza per determinare il flusso di muoni nell'atmosfera. In particolare, si calcola e si confronta con i dati sperimentali lo spettro d'energia dei muoni al livello del mare nella banda d'energia 30-1000 Mc².

(*) Traduzione a cura della Redazione.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Bilancio energetico della radiazione cosmica presso l'Equatore.

V. BENZI

Istituto di Fisica dell'Università - Cagliari

(ricevuto il 15 Aprile 1954)

Sulla base di precedenti bilanci per latitudini settentrionali ^(1,2) si è effettuato un bilancio energetico per il flusso verticale della radiazione cosmica vicino all'equatore ($\lambda=3^\circ$ N), tenendo conto, almeno in parte, della produzione di mesoni K oltre a quella dei mesoni π e μ .

L'intensità verticale della componente mesonica di quest'ultimo tipo è stata stimata considerando separatamente il gruppo dei mesoni veloci ($pc \gtrsim 7 \cdot 10^2$ MeV) da quello dei mesoni lenti.

L'intensità del primo gruppo in funzione dell'altezza è stata ottenuta sottraendo dalla curva della componente dura, stimata da ROSSI ⁽¹⁾ per l'intervallo $1030 < x < 250$ g/cm², e da BALASUBRAHMANYAN *et al.* ⁽³⁾ per i rimanenti 250 g/cm², una curva del tipo $\exp[-x/125]$ normalizzata in modo da dare l'intensità della componente dura per $x = 0$.

Per la componente dei mesoni lenti si sono usati i risultati di CONVERSI ⁽⁴⁾ estrapolati nella parte più alta dell'atmo-

sfera secondo il criterio indicato da ROSSI ⁽¹⁾.

Applicando una correzione del 15% per tenere conto della divergenza angolare dei mesoni rispetto alla verticale ⁽²⁾ si ha che per la produzione dei mesoni μ da parte della radiazione primaria incidente verticalmente a latitudine 3° N vengono dissipati

$$0,213 \text{ GeV cm}^{-2} \text{ s}^{-2} \text{ sterad}^{-1}.$$

Per valutare la perdita di energia sotto forma di neutrini, sono stati considerati i seguenti casi:

a) Gli unici processi di produzione per i neutrini sono i decadimenti $\pi \rightarrow \mu + \nu$ e $\mu \rightarrow e + \nu$.

b) Oltre ai precedenti ed in competizione con essi si deve considerare il decadimento $K \rightarrow \mu + \gamma + \nu$.

c) Caso identico a b) ma con il decadimento $K \rightarrow \mu + 2\nu$.

I casi b) e c) si sono trattati assumendo che 1/3 dell'energia apportata dai nucleoni primari di energia $E > 50$ GeV vada nella produzione dei K, e che nel decadimento di questi mesoni 1/3 dell'energia disponibile vada attribuita ai mesoni μ .

I risultati sono riportati in tabella, insieme con i valori della potenza dissi-

⁽¹⁾ B. ROSSI: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 537 (1948).

⁽²⁾ G. PUPPI: *Suppl. Nuovo Cimento*, **10**, 115 (1953).

⁽³⁾ V. K. BALASUBRAHMANYAN, G. S. GOKHALE, A. W. PEREIRA e A. S. RAO: *Rep. Bombay Conf.* (1951), p. 75.

⁽⁴⁾ M. CONVERSI: *Phys. Rev.*, **79**, 749 (1950).

pata in ionizzazione da tutte le componenti secondo NEHER ⁽⁵⁾, e con le perdite sottoterra e nelle evaporazioni nucleari. La stima delle perdite in quest'ultimo caso, fatta in base ai risultati ottenuti per latitudini settentrionali ⁽²⁾ e all'effetto di latitudine per la componente neutronica ⁽⁶⁾, è piuttosto incerta.

	(a)	(b)	(c)
Ionizzazione	0,400	0,400	0,400
Sottoterra	0,037	0,037	0,037
Ev. nucleari	0,040	0,040	0,040
Neutrini	0,200	0,260	0,330
<i>Totale</i>	0,677	0,737	0,807
	GeV cm ⁻² s ⁻¹ sterad ⁻¹		

Per il confronto con la potenza d'ingresso si sono considerate separatamente la componente protonica primaria e la componente composta di nuclei più pesanti (in maggior parte He). Mentre per quest'ultima si sono usati gli spettri integrali indicati da KAPLON *et al.* ⁽⁷⁾, per la prima si sono impiegati i risultati di VAN ALLEN e SINGER ⁽⁸⁾ per l'intervallo di energia $E \leq 14$ GeV, dopo aver sottratto il contributo della componente pesante ed il fondo pseudoprimario do-

vuto all'albedo, secondo la stima fatta da TREIMAN ⁽⁹⁾. Si è poi usato uno spettro di potenza del tipo $E^{-1,6}$ per $E \geq 4500$ GeV, normalizzato in base ai risultati ottenuti con le lastre ⁽¹⁰⁾, mentre per le energie comprese tra le precedenti si è usato uno spettro del tipo $E^{-1,4}$ opportunamente normalizzato. In tal modo con un taglio di latitudine di 13,8 GeV si ottiene una potenza d'ingresso di

$$1,00 \text{ GeV cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sterad}^{-1}.$$

Le discrepanze con i valori riportati nelle colonne a), b) e c) rispettivamente risultano pertanto del 33%, 25% e 20%. Si noti che con l'impiego di un unico spettro di potenza del tipo $E^{-1,1}$ si otterrebbe una potenza d'ingresso circa tre volte maggior di quella dissipata nell'atmosfera.

Riguardo alle discrepanze riportate, quella relativa allo schema c) può attribuirsi senz'altro all'errore sperimentale, che è stimato dell'ordine del 20%, mentre quella relativa allo schema a) potrebbe forse suggerire che tale schema è inadeguato ad una corretta descrizione dei processi di interazione della radiazione cosmica con l'atmosfera, quando si considerino latitudini in prossimità dell'equatore.

Ringrazio vivamente il prof. B. FERRETTI per avermi suggerito l'argomento trattato e per i numerosi consigli, ed il prof. G. FRONGIA per il suo costante interessamento.

⁽⁵⁾ H. V. NEHER: *Prog. in C.R. Phys.*, **1**, cap. V (1951).

⁽⁶⁾ J. A. SIMPSON e W. C. FAGOT: *Phys. Rev.*, **90**, 1068 (1953).

⁽⁷⁾ M. F. KAPLON, D. M. RITSON, B. PETERS e H. L. REYNOLDS: *Phys. Rev.*, **85**, 295 (1952).

⁽⁸⁾ J. A. VAN ALLEN e S. F. SINGER: *Phys. Rev.*, **78**, 819 (1950).

⁽⁹⁾ S. B. TREIMAN: *Phys. Rev.*, **91**, 957 (1953).

⁽¹⁰⁾ M. F. KAPLON, D. M. RITSON e E. P. WOODRUFF: *Phys. Rev.*, **85**, 933 (1952).

Un metodo per i problemi d'urto con un potenziale Coulombiano modificato.

D. BARONCINI

Istituto di Fisica dell'Università - Bologna

(ricevuto il 19 Aprile 1954)

Dovendo trattare con il metodo delle onde parziali l'urto tra due particelle cariche, che interagiscano per effetto di forze nucleari e di forze Coulombiane, può convenire di eliminare il potenziale Coulombiano. A partire dall'equazione radiale, se ne sviluppa la soluzione in serie delle soluzioni Coulombiane radiali; si elimina in tal modo il potenziale Coulombiano e si trasforma l'equazione radiale in un'equazione integrale, che contiene come kernel il trasformato del solo potenziale nucleare secondo le funzioni Coulombiane, e come incognita il coefficiente dello sviluppo in serie. L'equazione così ottenuta descrive lo scattering da parte del potenziale nucleare trasformato e, perciò, la sua soluzione ha il convenzionale comportamento asintotico di un'onda piana sovrapposta a un'onda diffusa. La fase di quest'ultima è data dalla parte singolare del termine che rappresenta l'onda diffusa.

Esprimendo la soluzione dell'equazione radiale di partenza mediante i coefficienti così ricavati, lo sviluppo in serie delle funzioni Coulombiane risulta nella sovrapposizione di una funzione Coulombiana regolare e di un'onda Coulombiana diffusa, sfasata rispetto alla prima. Si verifica che la fase che compare nella seconda è la fase stessa che caratterizza la soluzione dell'equazione integrale.

1. — Spazio delle coordinate.

Sia $V(r)$ il potenziale, che modifica il potenziale Coulombiano. L'equazione radiale di Schrödinger è:

$$(1) \quad \frac{d^2 R_l}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_l}{dr} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - 2 \frac{nk}{r} + U(r) \right] R_l = 0,$$

dove

$$k^2 = 2\mu E/\hbar^2, \quad U(r) = 2\mu V(r)/\hbar^2, \quad n = e^2/\hbar v.$$

Sia $L_l(kr)$ la soluzione radiale Coulombiana, regolare in $r=0$; $L_l(kr)$ risolve

l'equazione radiale

$$\frac{d^2 L_l}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dL_l}{dr} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - 2 \frac{nk}{r} \right] L_l = 0$$

e soddisfa la condizione asintotica:

$$L_l(kr) \sim (kr)^{-1} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \eta_l - n \log 2kr \right).$$

Se si sviluppa la soluzione della (1) in serie delle funzioni $L_l(kr)$ ponendo

$$(2) \quad R_l(r) = \int u_l(k') L_l(k'r) dk',$$

la (1) si trasforma nella seguente equazione integrale:

$$(3) \quad (k^2 - k'^2) u_l(k') + \int dk'' u_l(k'') W_l(k', k'') = 0.$$

La (3) è l'equazione integrale per scattering dovuto a un potenziale il cui kernel è ottenuto trasformando $U(r)$ mediante le soluzioni Coulombiane:

$$(3') \quad W_l(k', k'') = \int r^2 dr L_l^*(k') U(r) L_l(k''r).$$

Indicando con

$$(4) \quad u_l(k') = \delta(k - k') + \chi_l(k, k')$$

la soluzione di (3), la (2) esprime le soluzioni della (1) nella forma

$$(5) \quad R_l(r) = L_l(kr) + \int \chi_l(k, k') L_l(k'r) dk',$$

dove il secondo termine, che rappresenta la parte diffusa dell'onda Coulombiana, asintoticamente deve potersi esprimere nella forma

$$(6) \quad \text{tg } \delta_l \cdot \frac{1}{kr} \cos \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \eta_l - n \log 2kr \right).$$

Nella (6) $(1/kr) \cos(kr - l\pi/2 + \eta_l - n \log 2kr)$ è l'andamento asintotico della soluzione Coulombiana irregolare, $K_l(kr)$, e δ_l rappresenta lo sfasamento dell'onda Coulombiana diffusa rispetto all'onda Coulombiana regolare $L_l(kr)$.

Il fattore $\text{tg } \delta_l$, che compare nella (6), si ricava direttamente dalla (4).

Infatti solo la parte singolare della funzione $\chi_l(k, k')$ dà contributo $\neq 0$ all'in-

tegrale a secondo membro di (5): questa parte singolare è, d'altra parte, il termine che definisce lo sfasamento della soluzione (4) della (3) rispetto all'onda piana $\delta(k-k')$.

Se si indica con δ'_i tale fase, si ha:

$$(7) \quad \operatorname{tg} \delta'_i = -\pi \lim_{k' \rightarrow k} (k - k') \chi_i(k, k')$$

e si può scrivere la parte singolare della funzione $\chi_i(k, k')$ nella forma

$$-\frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \delta'_i \frac{1}{k - k'},$$

da cui si ha:

$$\int \chi_i(k, k') L_i(k'r) dk' = -\frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \delta'_i \int L_i(k'r) \frac{dk'}{k - k'}.$$

Poichè la soluzione regolare $L_i(k'r)$ ha la forma

$$\exp[ik'r]f_1(k'r) + \exp[-ik'r]f_2(k'r)$$

e la soluzione irregolare $K_i(k'r)$

$$i[\exp[ik'r]f_1(k'r) - \exp[-ik'r]f_2(k'r)]$$

si verifica che per grandi valori di r

$$-\frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \delta'_i \int L_i(k'r) \frac{dk'}{k - k'} = \operatorname{tg} \delta'_i K_i(kr)$$

e quindi che le due fasi coincidono: $\delta'_i = \delta_i$

La soluzione del problema di scattering senza potenziale Coulombiano descritta dalla (3) dà direttamente la fase dell'onda Coulombiana diffusa, come richiesto dalla (6).

2. - Spazio dei momenti.

Sia

$$(8) \quad (k^2 - p^2)\varphi_i(p) + \int q^2 dq [K_1(q, p) + K_c(p, q)]\varphi_i(q) = 0,$$

l'equazione radiale nello spazio dei momenti e siano $K_1(p, q)$ e $K_c(p, q)$ rispettivamente i kernel ottenuti trasformando il potenziale $V(r)$ e il potenziale Coulombiano allo spazio dei momenti. La trasformata $E_i(k, p)$ della soluzione radiale Coulombiana

$L_i(kr)$ risolve l'equazione

$$(k^2 - p^2)E_i(k, p) + \int q^2 dq K_c(p, q)E_i(k, q) = 0.$$

Se si pone

$$(9) \quad \varphi_i(p) = \int E_i(k', p) u_i(k') dk',$$

si ha da (8) l'equazione integrale

$$(10) \quad (k^2 - k'^2)u_i(k') + \int u_i(k'') W_i(k', k'') dk'' = 0$$

che coincide con la (3). La soluzione di (8) è quindi

$$(11) \quad \varphi_i(p) = E_i(k, p) + \int \chi_i(k, k') E_i(k', p) dk',$$

dove il secondo termine rappresenta la parte diffusa dell'onda Coulombiana, la cui fase, rispetto alla soluzione regolare, è data direttamente dalla soluzione (4) della (10), ossia della (3).

In una stesura più accurata, si mostrerà l'applicazione del procedimento al problema dell'urto mesone-nucleone ($T=3/2$) a basse energie.

Some Measurements on Overheated Liquids.

L. BERTANZA, G. MARTELLI and A. ZACUTTI

Istituto di Fisica dell'Università - Pisa

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione aggregata di Pisa

(ricevuto il 26 Aprile 1954)

It has been recently shown by GLASER ⁽¹⁾ that overheated liquids in particular thermodynamical conditions may be used as detectors of ionizing particles. The device based on this principle has been called by GLASER a « bubble chamber »: with it he has been able to photograph some tracks of particles crossing the liquid.

The great importance of the development of such a technique in relation with the high stopping power of the liquid is self-evident.

On the other hand there are good theoretical reasons for not expecting a working bubble chamber with a sensitive volume larger than some tenths or some hundreds of cubic centimeters, depending upon the nature of the liquid and the operation conditions.

This fact might be a very strong limitation to the field of applicability of the bubble chamber, because of the difficulty of overcoming the competition between scattering and magnetic curvature.

Since the bubble chamber of GLASER

was rather small (only few cubic centimeters) we built a bubble chamber having a sensitive volume of about 60 cm³, in order to investigate what are the possibilities of increasing the size of a bubble chamber, without reducing the efficiency of the device itself, and to enable us to carry on systematic measurements.

A detailed description of the device, and some photographs of tracks, will be given in *Il Nuovo Cimento*.

This bubble chamber has been filled under vacuum with spectroscopically pure pentane, and the measurements have been carried out at temperature of $\sim 138^\circ\text{C}$, as suggested by a theoretical calculation ⁽²⁾.

A pressure of about 20 atmospheres was applied to the liquid. In the presence of a radioactive source of γ -rays the liquid always erupted as soon as the pressure was released. An average time of 3 seconds was recorded as waiting time, in the absence of the source.

The average time between successive cosmic ray particles crossing the chamber

⁽¹⁾ D. A. GLASER: *Phys. Rev.*, **87**, 665 (1952); **91**, 762 (1953),

⁽²⁾ L. BERTANZA, G. MARTELLI and A. ZACUTTI: *On the theory of the bubble chamber* (to be published in *Nuovo Cimento*).

has been estimated to be about 2 seconds. In this estimate the contribution of the electronic component of cosmic rays has been neglected, since the experiment has been carried out under about 150 g/cm^2 of roof.

This first check of the theory of the formation of bubbles in a radiation sensitive liquid confirms the possibility of using larger bubble chambers as detectors of ionizing particles: further measurements are now in course, in order to check quantitatively the temperature depen-

dence of the sensitivity of the device for bubbles having different numbers of elementary charges.

The authors wish to express their gratitude to Prof. C. BALLARIO, who brought their attention to the subject. They are deeply indebted to Sig. GIANLUIGI RADICIOTTI for his help in constructing the glass parts, and to Sig. ARMANDO PECCHI for his invaluable cooperation in building the mechanical parts of the apparatus.

Quantizzazione della massa e formalismo non locale.

E. MINARDI

Aosta

(ricevuto il 29 Aprile 1954)

Recentemente è stato considerato da alcuni autori il problema della quantizzazione della massa, problema imposto dal gran numero di particelle con masse differenti recentemente scoperte.

In questa nota si presenta un esempio di quantizzazione delle masse, nel caso di particelle neutre, sia con spin 0 che con spin 1/2. Come suggerito da WATAGHIN ⁽¹⁾ e successivamente da altri autori, tale problema è considerato in connessione con la teoria dei campi non locali ed una lunghezza universale l viene introdotta nel formalismo. Inoltre tale problema è trattato in condizioni stazionarie, mediante una condizione supplementare già introdotta da YUKAWA ⁽²⁾ e come è stato suggerito recentemente da RAYSKI ⁽³⁾.

Introduciamo le variabili di Yukawa

$$(1a) \quad x_\nu = \frac{1}{2} (x'_\nu + x''_\nu),$$

$$(1b) \quad \eta_\nu = x'_\nu - x''_\nu.$$

Come è stato osservato da RAYSKI

⁽¹⁾ G. WATAGHIN: *Nuovo Cimento*, **10**, 500 (1953); **10**, 1618 (1953).

⁽²⁾ H. YUKAWA: *Phys. Rev.*, **77**, 219 (1950).

⁽³⁾ J. RAYSKI: *Nuovo Cimento*, **10**, 1792 (1953).

in un punto di vista non locale è molto naturale assumere una dipendenza delle variabili di campo dalle η_ν oltre che dalle x_ν ; poichè in tal caso ambedue le forme linearmente indipendenti $[\psi, d_\nu]_-$ e $[\psi, d_\nu]_+$ nelle ψ e d_ν (essendo gli operatori di spostamento) entrano in gioco nella teoria, e non soltanto la prima, come nel caso locale. In generale quindi, è plausibile che il campo di particelle debba essere descritto da un'equazione generalizzata, somma di due operatori, funzioni rispettivamente delle variabili x_ν e η_ν .

Nel caso di una particella scalare o pseudoscalare il moto ordinario è descritto da un'equazione ottenuta dall'invariante $p_\nu^{(x)} p^{(x)\nu} = -m^2$, con la ben nota sostituzione operatoriale dei p_ν^x .

Assumiamo che le proprietà interne della particella pseudoscalare siano descritte da una funzione $\varphi(\eta_\nu, \eta^\nu)$ che soddisfa ad un'equazione ottenuta dall'invariante $p_\nu^{(\eta)} p^{(\eta)\nu}$, ove i $p_\nu^{(\eta)}$ sono autovalori degli operatori

$$(2) \quad p \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial \eta_\nu}.$$

Come valore dell'invariante assumiamo

$$(3) \quad p_\nu^{(\eta)} p^{(\eta)\nu} = m^2,$$

cosicchè, se $u(x)$ è la funzione d'onda associata al movimento ordinario, l'equazione generalizzata è

$$(4) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2}{\partial \eta_\nu \partial \eta^\nu} \right) \psi(x, \eta) = 0,$$

con

$$\psi(x, \eta) = u(x) \varphi(\eta_\nu \eta^\nu).$$

Accanto alla precedente poniamo la seguente condizione di Yukawa ⁽²⁾:

$$(5) \quad p_\nu^{(\eta)} \eta^\nu \varphi(\eta_\nu \eta^\nu) = 0.$$

Nel sistema del baricentro della particella è $p_1^{(x)} = p_2^{(x)} = p_3^{(x)} = 0$ e per la (5) la $\varphi(\eta_\nu \eta^\nu)$ è ovunque nulla tranne che sull'iperpiano $\eta_4 = 0$; l'equazione spaziale descrivente le proprietà interne diviene allora

$$(6) \quad \Delta_\eta \varphi(r) + m^2 \varphi(r) = 0,$$

$$\text{con } r = (\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Cerchiamo una soluzione della precedente che sia nulla sulla superficie di una sfera di raggio l , ove l è una costante universale, e con centro nel punto $r=0$. Inoltre essendo

$$(7) \quad \mu_n = \varphi_r^*(r) m_n \varphi_n(r)$$

la densità di massa della particella di massa totale m_n , scegliamo quella soluzione che dia la quantità di massa maggiore nell'elemento di volume dello S_3 contenente il baricentro $r=0$ della particella.

All'esterno della sfera assumiamo la soluzione nulla della (6). Perciò le proprietà interne della particella descritte dalla $\varphi(r)$, riguardano, nel suo sistema del baricentro, solo il volume dello S_3 contenuto entro la sfera.

Entro tale sfera si hanno le auto-soluzioni .

$$(8) \quad \varphi_n(r) = c_n \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi r}{l},$$

c_n essendo una costante di normalizza-

zione; lo spettro di masse è:

$$(9) \quad m_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2l}.$$

Nel caso di particelle con spin $1/2$ l'invariante analogo a $p_\nu^{(\eta)} p^{(\eta)\nu}$ è $\gamma_\nu p^{(\eta)\nu}$; poniamo

$$(10) \quad \gamma_\nu p^{(\eta)\nu} = -im\beta.$$

L'equazione generalizzata è allora

$$(11) \quad \gamma_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{\partial}{\partial \eta^\nu} \right) w(x) \varphi(\eta) = m(\beta + 1) w(x) \varphi(\eta),$$

$w(x)$ essendo lo spinore associato al moto ordinario.

Nel sistema del baricentro della particella, ricordando la (5), la $\varphi(\eta)$ è diversa da zero solo se $\eta_4 = 0$.

La equazione spaziale descrivente le proprietà interne si scrive

$$(12) \quad i\alpha_\nu \frac{\partial}{\partial \eta^\nu} \varphi(\eta) - m\varphi(\eta) = 0, \quad (v = 1, 2, 3).$$

Per risolvere la precedente, introduciamo, come nella trattazione di Dirac ⁽⁴⁾ di una particella spinoriale in campo centrale, un operatore

$$(13) \quad k = \beta(\sigma' L^{(\eta)} + 1),$$

$L^{(\eta)}$ essendo il momento angolare nello spazio delle η_ν e

$$(14) \quad \sigma' = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

ove le componenti di σ sono le note matrici di Pauli.

Com'è noto, se $J(J+1)$, con J semintero dispari positivo, sono gli autovalori

⁽⁴⁾ P. A. M. DIRAC: *Principles of Quantum Mechanics* (Oxford, 1947).

di $(L^{(\eta)} + \frac{1}{2}\sigma')^2$, k^2 ha gli autovalori $(J + \frac{1}{2})^2$, cosicchè k può essere $\pm 1, \pm 2, \dots$

Scrivendo la (12) in coordinate polari ⁽³⁾ e ponendo

$$(15) \quad \varphi(r) = \begin{pmatrix} Y(r) \\ Z(r) \end{pmatrix},$$

essa conduce al sistema di equazioni:

$$(16a) \quad \frac{d^2 Y}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dY}{dr} + \left(m^2 - \frac{k(k+1)}{r^2} \right) Y = 0,$$

$$(16b) \quad Z = c -$$

$$- \int_0^r \left[mY - \frac{k-1}{rm} \left(Y' + \frac{(1+k)Y}{r} \right) \right] dr.$$

La soluzione non singolare nell'origine della (35a) è la funzione sferica di Bessel

$$(17) \quad Y_k(mr) = \frac{c_k}{\sqrt{mr}} J_{k+\frac{1}{2}}(mr),$$

$J_{k+\frac{1}{2}}(mr)$ essendo la funzione di Bessel di ordine $k + \frac{1}{2}$ (k positivo) e c_k una costante di normalizzazione.

Dobbiamo ora porre che Y e Z siano nulle sulla superficie della sfera di raggio l .

Per la componente Z ciò è ottenuto ponendo:

$$(18) \quad c = \int_0^l \left[mY - \frac{k-1}{mr} \left(Y' + \frac{(1+k)Y}{r} \right) \right] dr.$$

Nel caso della $Y_k(mr)$ deve invece essere soddisfatta la condizione:

$$(19) \quad J_{k+\frac{1}{2}}(ml) = 0.$$

Questa equazione fornisce uno spettro di masse per ogni valore intero positivo di k .

Sia lo spettro di masse (9) delle particelle con spin 0, che gli spettri ottenuti dalla (22), devono riguardare particelle neutre poichè il campo elettromagnetico non entra nella presente formulazione. Perciò la (9), per $n=0$, deve dare la massa del mesone π^0 ; assumendo per questa il valore $265 m_e$ (m_e , massa dell'elettrone), la lunghezza universale l risulta allora dalla (9) in unità C.G.S.:

$$(20) \quad l = \frac{\pi\hbar}{2c \cdot 265 m_e} = 2,3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Con questo valore di l le prime cinque radici della (22), nel caso $k=1$, danno

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 758 m_e, \quad m_3 = 1305 m_e, \\ m_4 = 1839 m_e, \quad m_5 = 2365 m_e.$$

Nel caso $k=2$, le prime radici danno

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 972 m_e, \\ m_3 = 1558 m_e, \quad m_4 = 2072 m_e.$$

Come si vede non si ottiene la massa dell'elettrone e del mesone μ . Il fatto che non si ottenga la massa dell'elettrone è in accordo con la veduta classica secondo la quale essa è di origine elettromagnetica. Il metodo ora presentato deve essere perfezionato in maniera da includere l'interazione tra il campo $\varphi(\eta)$ e il campo elettromagnetico e studiare il contributo di quest'ultimo al valore della massa. È quindi in ogni caso molto prematuro, come si comprende, concludere che il presente tentativo possa condurre a rappresentare completamente i fatti fisici.

L'autore ringrazia il prof. G. WATAGHIN per le utili discussioni critiche sull'argomento.

Interaction of π^+ Mesons in Photographic Plates (II).

A. MINGUZZI, G. PUPPI and A. RANZI

*Istituto di Fisica dell'Università - Bologna**Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova*

(ricevuto il 12 Aprile 1954)

In a sistematic survey of photographic plates exposed to the 62 MeV π^+ meson beam of the Nevis cyclotron, the various phenomena occurring have been exten-

great scattering angles have been pointed out also in other experiments, with cloud chambers ⁽²⁾. The particular angular dependence, shown by all authors, has sug-

TABLE I.

	Stars	Inelastic scatt.	Stars plus in. scatt.	Elastic scatt. $\vartheta > 12^\circ$	Elastic scatt. $\vartheta > 40^\circ$	Elastic scatt. $\vartheta > 90^\circ$
No. of events	291	72	363	125	35	24
Mean free path (*) in Ilford G5 (in cm)	39.9 ± 3.6	135.5 ± 22.3	30.8 ± 2.7	53.9 ± 5.6	225.2 ± 47.9	369.5 ± 101.2

(*) The $(\pi^+ + P)$ have been excluded.

sively investigated. We wish to discuss in this letter the problem of the scattering by nuclei. In table I the relevant data have been collected.

As is well known from the first results of BERNARDINI and cow. ⁽¹⁾ both elastic and inelastic scattering of pions occur in the photographic plates. The peculiar characteristics of the inelastic scattering with large energy losses and

gested a strong correlation of this phenomenon with the elementary meson-nucleon scattering, but no definite conclusion has been drawn. The aim of this paper is to present new experimental results on this field as well as a quantitative interpretation of the inelastic scattering by nuclei as due to single scattering of the pions against a nucleon inside the nuclear matter.

The experimental results refer to an

⁽¹⁾ G. BERNARDINI, E. T. BOOTH and L. LEDERMAN: *Phys. Rev.*, **83**, 1277 (1951); G. BERNARDINI and F. LEVY: *Phys. Rev.*, **84**, 610 (1952).

⁽²⁾ H. BYFIELD, J. KESSLER and L. LEDERMAN: *Phys. Rev.*, **86**, 17 (1952).

analysis of 488 events, such as stars, inelastic scatterings and elastic scatterings with a projected angle greater than 10° . From these events, 197 show

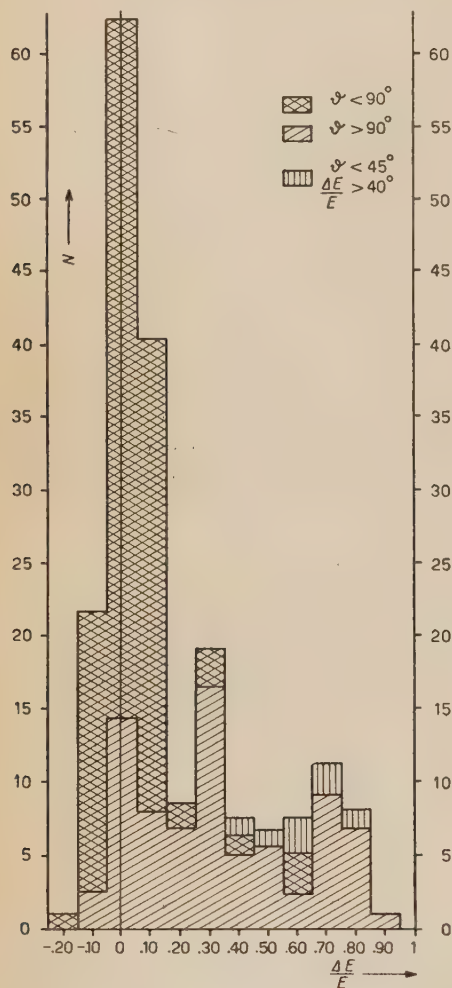


Fig. 1. — Distribution of all scatterings with a track length larger than 300μ , corrected for geometrical losses.

a pion coming out and these latter have been analyzed as a function of the parameter $\Delta E/E$ (i.e. the fractional loss of energy of the pion). This criterion, in a beam of pions not strictly monochromatic, as in our case, permits an analysis of the scattering phenomenon that is lar-

gely independent from the energy of the incoming pion. The results are shown in Fig. 1, as a block diagram; the heavy shaded area refers to the scatterings in the backward direction. As it is easy to see, our method allows a statistical separation of the scattering in two groups: an elastic group, symmetrically distributed with respect to $\Delta E/E=0$, and a broad inelastic group with practically any fractional loss. The differential cross-section for the elastic group is shown in

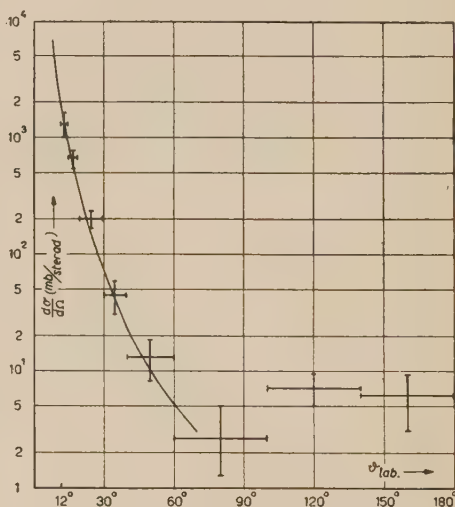


Fig. 2.

Fig. 2, where the continuous curve represents the mean Rutherford scattering, i.e. the Coulomb scattering cross-section by point nucleus averaged over the nuclei of the emulsion for the mean energy of the beam. From Fig. 1 statistically interpreted, the existence of a group of backward directed elastic scatterings becomes clearly evident, as shown also by other experiments in which the discrimination between elastic and inelastic scattering was made with an arbitrary cut-off $\Delta E/E$.

As emphasized also by others it is impossible to describe this group of elastic scatterings with a continuous model of the nucleus i.e. by a complex po-

tential of central forces experienced by the meson, of the type

$$(V + iS)f(r),$$

with V and S real scalar quantities. It results from the experiment that if the pion-nucleus forces must be built up from the pion-nucleon forces, then the process of averaging over all the nucleons of the nuclei does not lead to central forces ⁽³⁾. We have not been able to find clearly any effect of interference between Coulomb and nuclear potential,

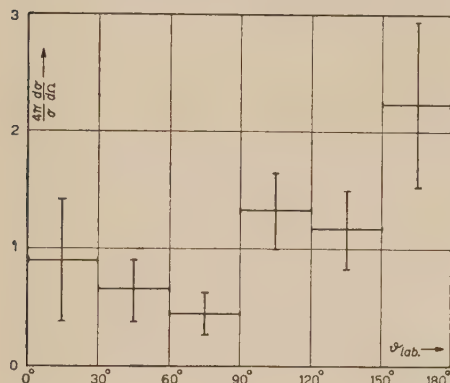


Fig. 3.

as shown by LEDERMAN and coworkers at the same energy, but for heavy elements this is more difficult to see and our statistic is not sufficiently high for this purpose. The existence of the elastic group in the backward direction on the contrary is confirmed also by other unpublished results of our laboratory.

Let us now discuss the problem of the inelastic scatterings, whose angular distribution is plotted in Fig. 4. We have tried to interpret the inelastic scatterings as due to single or plural scatterings of the pion against a nucleon inside the nuclear matter, supposing that the characteristics of these scatterings are the same, if allowed by the Pauli principle,

as those against the free nucleons. From the known characteristics of the meson-nucleon scattering ⁽⁴⁾ we know that the most important process, at this energy, is the scattering of positive pions on protons. A Montecarlo calculation has been done for this process inside the nuclear matter with a Fermi gas model of the nucleus taking into account the motion of nucleons, for his implication on the total cross-section (which is strongly energy dependent) and on the kinematics of the scattering process. The calculations have been performed for a pion's energy of 65 MeV inside the nuclear matter; and for this energy only 57% of the scatterings are allowed by the Pauli principle giving a mean cross-section of 21 mb per proton, while without the Pauli principle the mean cross-section per proton would be of 27 mb, the cross-section assumed for the scat-

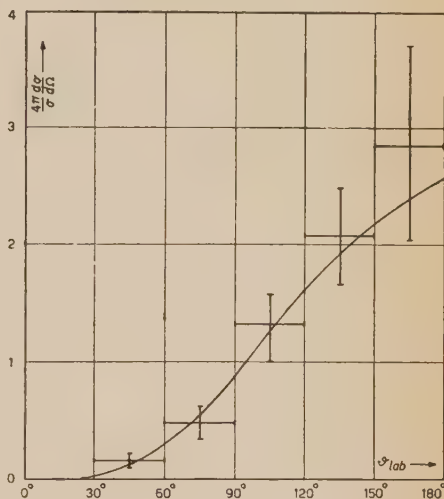


Fig. 4.

tering against protons at rest being of 20 mb.

We have also investigated the influence of a real attractive potential

⁽³⁾ D. C. PEASLEE: *Phys. Rev.*, **86**, 269 (1952); K. M. WATSON: *Phys. Rev.*, **89**, 575 (1953).

⁽⁴⁾ D. BODANSKY, A. SACHS and J. STEINBERG: *Phys. Rev.*, **90**, 996-997 (1953).

$V = 15$ MeV experienced by the pion by crossing the nuclear boundary: this potential is required for the explanation of the interference effect on light elements. The effect of this potential on inelastic scatterings is to increase the fractional energy losses of the pion, by a factor $(1 + V/E)$. Fig. 4 shows the calculated angular distribution in the lab. system of pions scattered by protons inside the nucleus together with a con-

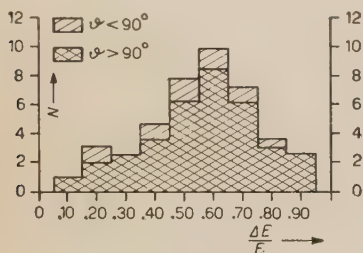


Fig. 5.

tinuous curve which represents the scattering by a proton at rest; the two distributions are approximately the same.

The broad distribution of the scat-

terings as a function of $\Delta E/E$ predicted by the calculation (Fig. 5) is also in agreement with the experimental distribution if we single out a group around the fractional energy loss of $\Delta E/E \cong 0.30$ which is, in part at least, due to the scatterings on neutrons.

Of the total of inelastic scatterings experimentally observed 15% roughly show large energy losses and forward direction; they can be classified as double scatterings and have been not included in the previous comparison in order to isolate the results of the first scattering which takes place inside the nuclear matter.

At this stage of the research the most reasonable interpretation of the inelastic scatterings of pions against nuclei seems to be in terms of individual meson nucleon scattering in which the nucleon preserves the properties of interaction of the free state, so that non linear effects seem to play no important role.

A much more profound analysis is necessary in order to know to what degree of approximation this extreme model is true.

IL NUOVO CIMENTO

INDICI

DEL VOLUME XI - SERIE IX

1954

PRINTED IN ITALY

INDICE SISTEMATICO PER NUMERI SUCCESSIVI DEL PERIODICO

N. 1, 1° GENNAIO 1954

P. CAMAGNI and G. CHIAROTTI - A study of the $F \rightarrow Z_1$ Conversion KCl Crystals with Divalent Impurities	pag. 1
C. C. GROSJEAN - Solution of a Non-Isotropic Random Flight Problem in the Case of a Non-Isotropic Point Source	» 11
C. CERNIGOI e G. POIANI - Sullo spettro della componente fotonica al livello del mare	» 41
F. DE MICHELIS e R. MALVANO - Discriminatore differenziale oscillografico e sua applicazione nei circuiti a coincidenza	» 49
M. R. SCHAFROTH - A Sound-Wave Description of Fermion Assemblies	» 53
G. SOMEDA e M. MERLIN - Un elettromagnete di grande potenza per lastre nucleari	» 73
N. DALLAPORTA - On the Nature of the κ -Meson	» 82

Lettere alla Redazione:

K. SYMANZIK - Zur renormierten einzeitigen Bethe-Salpeter-Gleichung	» 88
A. LOVATI, A. MURA and C. SUCCI - On the Production of Electronic Component by Fast μ -Mesons	» 92
E. FABRI e B. F. TUSCHEK - La vita media del mesone τ	» 96
C. B. A. MCCUSKER and F. C. ROESLER - An Analysis of Cosmic Ray Jets	» 98
S. J. GOLDSACK and D. HIRSCHBERG - A Punched Card System of Recording of Events in Nuclear Emulsion Work	» 100
G. MORPURGO - Further Remarks on Tamm-Dancoff Method	» 103
A. KIND e G. PATERGNANI - A proposito di un modello statistico a particelle indipendenti del nucleo pesante	» 106
P. CALDIROLA - Spiegazione classi a del momento magnetico anormale dell'eltrone	» 108

<i>Libri ricevuti e Recensioni</i>	» 111
--	-------

N. 2, 1° FEBBRAIO 1954

C. DILWORTH, S. J. GOLDSACK and L. HIRSCHFELD - Determination of the Mass of Slow Particles by the Constant Sagitta Method	pag. 113
P. G. BORDONI e M. NUOVO - Sulla dissipazione delle onde elastiche nel piombo ad alta temperatura	» 127

M. CINI and S. FUBINI - Non Perturbation Treatment of Scattering in Quantum Field Theory	pag. 142
E. GATTI - A Stable High Speed Multichannel Pulse Analyzer	» 153
A. LOVATI e C. SUCCI - Una camera a diffusione con campo magnetico per fisica nucleare	» 163
U. HABER-SCHAIM and G. YEKUTIELI - Energetic Nuclear Collisions in the Upper Atmosphere. (I). The Nucleon Pion Cascade	» 172
H. T. FLINT and E. M. WILLIAMSON - A Theory of the Electron	» 188

Lettere alla Redazione:

E. CORINALDESI - Relativistic Scattering of Electrons and the Born Approximation	» 200
O. BERGMANN and N. BAKER - On Corben's Formulation of the Dirac Equation	» 203
J. P. DAVIDSON - The Anomalous Large Angle Scattering of μ -Mesons	» 205
E. AMALDI, G. BARONI, C. CASTAGNOLI, G. CORTINI, C. FRANZINETTI and A. MANFREDINI - On a Possible Negative $K \rightarrow \pi$ Meson Decay	» 207
A. BONETTI, R. LEVI SETTI, M. PANETTI, L. SCARSI and G. TOMASINI - On the Possible Ejection of a Meson-Active Triton from a Nuclear Disintegration	» 210

Proposte e discussioni:

E. AMALDI, C. D. ANDERSON, P. M. S. BLACKETT, W. B. FRETTER, L. LE-PRINCE-RINGUET, B. PETERS, C. F. POWELL, C. D. ROCHESTER, B. ROSSI and B. W. THOMPSON - Symbols for Fundamental Particles	» 213
--	-------

<i>Libri ricevuti e Recensioni</i>	» 215
--	-------

N. 3, 1° MARZO 1954

L. BERTANZA and G. MARTELLI - Fluctuations in the Transition Curves of Cosmic Ray Electrons	pag. 217
D. BLANC - Caractéristiques de fonctionnement des compteurs à cathode externe remplis de méthylal pur	» 231
C. MILONE - Sulla dipendenza del rapporto fotoni/elettroni negli sciami di raggi cosmici dalla densità media degli sciami selezionati	» 241
E. GROSSETTI - Determinazione del coefficiente di assorbimento degli ultrasuoni dei liquidi mediante il metodo termico	» 250
L. COLLI, U. FACCHINI and A. ROSSI - Study of RCA 5819 and EMI 6260 Photomultipliers as Individual Photon Counters	» 255
E. GATTI, E. GERMAGNOLI e G. PERONA - Misure di sezioni d'urto totali per neutroni lenti	» 262
F. BASSANI and F. G. FUMI - The Interaction between Equilibrium Defects in the Alkali Halides: The « Ground State » binding Energies between Divalent Impurities and Vacancies	» 274
T. REGGE - Tensor Force and Intermediate Coupling in P -Shell Nuclei	» 285

B. GREGORY, A. LAGARRIGUE, L. LEPRINCE-RINGUET, F. MULLER et CH. PEYROU - Étude des mesons K chargés, au moyen de deux chambres de Wilson superposées	pag. 292
---	----------

Lettere alla Redazione:

S. PARTHASARATHY and N. N. BAKHSHI - A Further Elucidation of the Relationship between Sound Velocity in Liquids and Molecular Weight	» 310
E. FREESE - Propagation- and Wavefunctions in Quantum Theory of Fields	» 312
M. CINI, G. MORPURGO and B. TOUSCHEK - A Non-Perturbation Treatment of Scattering and the « Wentzel-Example »	» 316
M. AGENO - Fotofluorescenza e scintillazioni	» 318
G. CORTELLESA e R. QUERZOLI - Sistema ottico per la trasmissione di informazioni	» 321
A. GAMBA - Symmetry Correlations in Nuclear Reactions	» 323
F. DUIMIO - Su un'equazione alle differenze finite per l'elettrone classico	» 326
A. BONETTI, R. LEVI SETTI, M. PANETTI, L. SCARSI and G. TOMASINI - Remarks on the Decay of a Meson-Active Triton	» 330

<i>Libri ricevuti e Recensioni</i>	» 332
--	-------

N. 4, 1° APRILE 1954

R. E. MARSHAK and A. M. L. MESSIAH - Pion Production by Polarised Beams of Nucleons	pag. 337
H. LEHMANN - Über Eigenschaften von Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonstanten quantisierter Felder	» 342
B. BERTOTTI - On the Relation between Fundamental Tensor and Affinity in Unified Field Theory	» 358
M. M. LÉVY and R. E. MARSHAK - The S-Wave in Pion-Nucleon Scattering	» 366
G. BELLIBONI e B. VITALE - Distribuzioni e correlazioni angolari e distribuzioni energetiche dei rami in stelle di disintegrazione nucleare prodotte dalla radiazione cosmica	» 372
W. E. HAZEN - Air-Shower Transition in Water; Interpretation of Under-Water Decoherence Curves	» 393
G. CARERI, A. PAOLETTI and F. L. SALVETTI - Self-Diffusion in Liquid Indium	» 399
E. FERMI - Polarization of High Energy Protons Scattered by Nuclei	» 407

Lettere alla Redazione:

E. CLEMENTEL - Sezione d'urto per i processi (d, p) e (p, d)	» 412
W. ZIMMERMANN - Zum Renormierungsprogramm der Feldphysik	» 416
A. DEBENEDETTI, C. M. GARELLI, G. LOVERA, L. TALLONE and M. VIGONE - An Analysis of Two Positive τ -Mesons	» 420
C. C. DILWORTH, S. J. GOLDSACK, T. F. HOANG and L. SCARSI - Remarks on Recent Analyses of Cosmic Ray Jets	» 424

N. 5, 1° MAGGIO 1954

A. CARRELLI e F. CENNAMO - La viscosità di volume - (I)	pag. 429
P. CIOK, M. DANYSZ and J. GIERULA - Delayed Decay of Heavy Fragments Ejected from Cosmic Ray Stars	» 436
R. GATTO - Sulla indipendenza dalla carica nella produzione di particelle Λ	» 445
G. BERTOLINI, M. BETTONI and A. BISI - Total Ionization of α -Particles of Po in Mixtures of Gases	» 458
E. CORINALDESI - Construction of Potentials from Phase Shift and Binding Energies of Relativistic Equations	» 468
E. FABRI - A study of τ -Meson Decay	» 479
E. R. CAIANIELLO - On Quantum Field Theory. II: Non-Perturbative Equat- ions and Methods	» 492
P. E. ARGAN, A. GIGLI and S. SCIUTI - On the Interaction of μ -Mesons with Matter at High Energies	» 530
G. BERTOLINI, A. BISI, E. LAZZARINI and L. ZAPPA - On the L -Capture to K -Capture Ratio in Cd^{109}	» 539
W. F. FRY and G. R. WHITE - Non-Mesonic Decay of a Bound V_1^0 -Particle	» 551

Lettere alla Redazione:

G. SALVINI - Proposal of a Synchrotron with a Double Vacuum Chamber	» 555
W. ZIMMERMANN - Einzeitige Verfahren der Feldphysik	» 559
A. ASCOLI BALZANELLI e R. ASCOLI - Esperienze sull'effetto Čerenkov nell'aria	» 562
M. L. CALZOLARI, G. DASCOLA, A. GAINOTTI e S. MORA - Produzione di Mesoni π in Carbonio ed Alluminio	» 565
H. T. FLINT and E. M. WILLIAMSON - A Theory of the Electron	» 568
S. PETRALIA - Assorbimento di ultrasuoni in miscele di elio-argon	» 570
P. COLOMBINO, S. FERRONI and G. WATAGHIN - On the Production of Pe- netrating Showers in Hydrogen and Carbon	572

<i>Addendum</i>	» 574
---------------------------	-------

<i>Libri ricevuti e Recensioni</i>	» 575
--	-------

N. 6, 1° GIUGNO 1954

W. ZIMMERMANN - Yang-Feldmanformalismus und einzeitige Wellenfunk- tionen	pag. 577
A. CARRELLI e G. BRANCA - Su di un'onda di pressione nei liquidi	» 590
M. SIMONETTA e A. VACIAGO - Sulla struttura elettronica del Nitrobenzolo	» 596
A. ALBERIGI-QUARANTA e E. PANCINI - Sulla cattura dei mesoni μ^- da parte dei nuclei leggeri	» 607
P. BROVETTO and G. CINI - High Polarization of Nuclei in Paramagnetic Substances	» 618

J. E. PLAINEVAUX - Mouvement parasite d'une suspension élastique symétrique à compensation et asservissement	pag. 626
C. C. GROSJEAN and V. J. VAN HUYSE - On the Properties of a Spectrometer for Linear Electron Accelerator	» 639
D. BRINI, L. PELI, O. RIMONDI and P. VERONESI - An Amplifier with Low Dissipation and Short Rise-Time for C.R.T.	» 651
D. BRINI, L. PELI, O. RIMONDI and P. VERONESI - Study of a Liquid Scintillation Counter	» 655
F. BEGEMANN, J. GEISS, F. G. HOUTERMANS und W. BUSER - Isotopenzusammensetzung und Radioaktivität von rezentem Vesuvblei	» 663
M. SCHÖNBERG - A Non-Linear Generalization of the Schrödinger and Dirac Equation	» 674
U. HABER-SCHAIM and G. YEKUTIELI - Energetic Nuclear Collisions in the Upper Atmosphere. (II.) The Muon Component	» 683

Lettere alla Redazione:

V. BENZI - Bilancio energetico della radiazione cosmica presso l'equatore	» 686
D. BARONCINI - Un metodo per risolvere il problema del potenziale Coulombiano modificato	» 688
L. BERTANZA, G. MARTELLI and A. ZACUTTI - Some Measurements on Overheated Liquids	» 692
E. MINARDI - Quantizzazione delle masse e formalismo non locale	» 694
A. MINGUZZI, G. PUPPI and A. RANZI - Interaction of π^+ Mesons in Photographic Plates (II)	» 697

INDICE PER AUTORI

Le sigle L., N.T., I., N.d.L., P. D., si riferiscono rispettivamente alle *Lettere alla Redazione*, alle *Note Tecniche*, alle *Informazioni*, alle *Note di Laboratorio*, alle *Proposte e Discussioni*.

AGENO M. - Fotofluorescenza e scintillazioni (L.)	pag. 318
ALBERIGI-QUARANTA A. e E. PANCINI - Sulla cattura dei mesoni μ^- da parte dei nuclei leggeri	» 607
AMALDI E., C. D. ANDERSON, P. M. S. BLACKETT, W. B. FRETTER, L. LE-PRINCE-RINGUET, B. PETERS, C. F. POWELL, C. D. ROCHESTER, B. ROSSI and B. W. THOMPSON - Symbols for Fundamental Particles (P.D.)	» 213
AMALDI E., G. BARONI, C. CASTAGNOLI, G. CORTINI, C. FRANZINETTI and A. MANFREDINI - On a possible negative $K \rightarrow \pi$ Meson Decay (L.)	» 207
ANDERSON C. D. (vedi AMALDI E.) (P. D.)	» 213
ARGAN P. E., A. GIGLI and S. SCIUTI - On the Interaction of μ -Mesons with Matter at High Energies	» 530
ASCOLI BALZANELLI A. e R. ASCOLI - Esperienze sull'effetto Čerenkov nell'aria (L.)	» 562
ASCOLI R. (vedi ASCOLI BALZANELLI A.) (L.)	» 562
BAKER V. (vedi BERGMANN O.) (L.)	» 203
BAKHSKI N. N. (vedi PARTHASARATHY S.) (L.)	» 310

BARONCINI D. – Un metodo per risolvere il problema del potenziale coulombiano modificato (L.)	pag. 688
BARONI G. (vedi AMALDI E.) (L.)	» 207
BASSANI F. and F. G. FUMI – The Interaction between Equilibrium Defects in the Alkali Halides: The « Ground State » binding Energies between Divalent Impurities and Vacancies	» 274
BEGEMANN F., J. GEISS, F. G. HOUTERMANS and W. BUSER – Isotopenzusammensetzung und Radioaktivität von rezentem Vesuvblei	» 663
BELLIBONI G. e B. VITALE – Distribuzioni e correlazioni angolari e distribuzioni energetiche dei rami di stelle di disintegrazione nucleare prodotte dalla radiazione cosmica	» 372
BENZI V. – Bilancio energetico della radiazione cosmica presso l'equatore (L.)	» 686
BERGMANN O. and N. BAKER – On Corben's Formulation of the Dirac Equation (L.)	» 203
BERTANZA L. and G. MARTELLI – Fluctuations in the Transition Curves of Cosmic Ray Electrons	» 217
BERTANZA L., G. MARTELLI and A. ZACUTTI – Some Measurements on Overheated Liquids (L.)	» 692
BERTOLINI G., M. BETTONI and A. BISI – Total Ionization of α -Particles of Po in Mixtures of Gases	» 458
BERTOLINI G., A. BISI, E. LAZZARINI and L. ZAPPA – On the L -Capture to K -Capture Ratio in Cd^{106}	» 359
BERTOTTI B. – On the Relation Between Fundamental Tensor and Affinity in Unified Field Theory	» 358
BETTONI M. (vedi BERTOLINI G.)	» 458
BISI A. (vedi BERTOLINI G.)	» 458
BISI A. (vedi BERTOLINI G.)	» 539
BLACKETT P. S. M. (vedi AMALDI E.) (P. D.)	» 213
BLANC D. – Caractéristiques de fonctionnement des compteurs à cathode externe remplis de méthylal pur	» 231
BONETTI A., R. LEVI SETTI, M. PANETTI, L. SCARSI and G. TOMASINI – On the Possible Ejection of a Meson-Active Triton from a Nuclear Disintegration (L.)	» 210
BONETTI A., R. LEVI SETTI, M. PANETTI, L. SCARSI and G. TOMASINI – Remarks on the Decay of a Meson-Active Triton (L.)	» 330
BORDONI P. G. e M. NUOVO – Sulla dissipazione delle onde elastiche nel piombo ad alta temperatura	» 127
BRANCA G. (vedi CARRELLI A.)	» 590
BRINI D., L. PELI, O. RIMONDI and P. VERONESI – An Amplifier with Low Dissipation and Short Rise-Time for C.R.T.	» 651
BRINI D., L. PELI, O. RIMONDI and P. VERONESI – Study of a Liquid Scintillation Counter	» 655
BROVETTO P. and G. CINI – High Polarization of Nuclei in Paramagnetic Substances	» 618
BUSER W. (vedi BEGEMANN F.)	» 663
CAIANIELLO E. R. – On Quantum Field Theory. II: Non-Perturbative Equations and Methods	» 492
CALDIROLA P. – Spiegazione classica del momento magnetico anomalo dell'elettrone (L.)	» 108
CALZOLARI M. L., G. DASCOLA, A. GAINOTTI e S. MORA – Produzione di Mesoni π in Carbonio e Alluminio (L.)	» 565

CAMAGNI P. and G. CHIAROTTI - A Study of the $F \rightarrow Z_1$ Conversion in KCl Crystals with Divalent Impurities	pag. 1
CARERI G., A. PAOLETTI and F. L. SALVETTI - Self-Diffusion in Liquid Indium	» 399
CARRELLI A. e G. BRANCA - Su di un'onda di pressione nei liquidi	» 590
CARRELLI A. e F. CENNAMO - La viscosità di volume (I)	» 429
CASTAGNOLI C. (vedi AMALDI E.) (L.)	» 207
CENNAMO F. (vedi CARRELLI A.)	» 429
CERNIGOI C. e G. POIANI - Sullo spettro della componente fotonica al livello del mare	» 41
CHIAROTTI G. (vedi CAMAGNI P.)	» 1
CINI G. (vedi BROVETTO P.)	» 618
CINI M. and S. FUBINI - Non Perturbation Treatment of Scattering in Quantum Field Theory	» 142
CINI M., G. MORPURGO and B. TOUSCHEK - A Non-Perturbation Treatment of Scattering and the «Wentzel-Example» (L.)	» 316
CIOK P., M. DANYSZ and J. GIERULA - Delayed Decay of Heavy Fragments Ejected from Cosmic Ray Stars	» 436
CLEMENTEL E. - Sezione d'urto per i processi (d, p) e (p, d) (L.)	» 412
COLLI L., U. FACCHINI and A. ROSSI - Study of RCA 5819 and EMI 6260 Photomultipliers as Individual Photon Counters	» 255
COLOMBINO P., S. FERRONI and G. WATAGHIN - On the Production of Pene- trating Showers in Hydrogen and Carbon (L.)	» 572
CORINALDESI E. - Relativistic Scattering of Electrons and the Born Approx- imation (L.)	» 200
CORINALDESI E. - Construction of Potentials from Phase Shift and Binding Energies of Relativistic Equations	» 468
CORTELESSA G. e R. QUERZOLI - Sistema ottico per la trasmissione di infor- mazioni (L.)	» 321
CORTINI G. (vedi AMALDI E.) (L.)	» 207
DALLAPORTA N. - On the Nature of the κ -Meson	» 82
DANYSZ M. (vedi CIOK P.)	» 436
DASCOLA G. (vedi CALZOLARI M. L.) (L.)	» 565
DAVIDSON J. P. - The Anomalous Large Angle Scattering of μ -Meson (L.)	» 205
DEBENEDETTI A., C. M. GARELLI, G. LOVERA, L. TALLONE and M. VIGONE - An Analysis of Two-Positive τ -Mesons (L.)	420, 574
DE MICHELIS F. e R. MALVANO - Discriminatore differenziale oscillografico e sua applicazione nei circuiti a coincidenza	» 49
DILWORTH C. C., S. J. GOLDSACK and L. HIRSCHBERG - Determination of the Mass of Slow Particles by the Constant Sagitta Method	» 113
DILWORTH C. C., S. J. GOLDSACK, T. F. HOANG and L. SCARSI - Remarks on Recent Analyses of Cosmic Ray Jets (L.)	» 424
DUMIO F. - Su un'equazione alle differenze finite per l'elettrone classico (L.)	» 326
FABRI E. - A Study of τ -Meson Decay	» 479
FABRI E. e B. F. TOUSCHEK - La vita media del mesone τ (L.)	» 96
FACCHINI U. (vedi COLLI L.)	» 255
FERMI E. - Polarization of High Energy Protons Scattered by Nuclei	» 407
FERRONI S. (vedi COLOMBINO) P. (L.)	» 572
FLINT H. T. and E. M. WILLIAMSON - A Theory of the Electron	» 188
FLINT H. T. and E. M. WILLIAMSON - A Theory of the Electron (L.)	» 568
FRANZINETTI C., (vedi AMALDI E.) (L.)	» 207

FREESE E. - Propagation- and Wavefunctions in Quantum Theory of Fields (L.)	»	312
FRETTER W. B. (vedi AMALDI E.) (P. D.)	»	213
FRY W. F. and G. R. WHITE - Non-Mesonic Decay of a Bound V_1^0 -Particle	»	551
FUBINI S. (vedi CINI M.)	»	142
FUMI F. G. (vedi BASSANI F.)	»	274
GAINOTTI A. (vedi CALZOLARI M. L.) (L.)	»	565
GAMBA A. - Symmetry Correlations in Nuclear Reactions (L.)	»	323
GARELLI C. M. (vedi DEBENEDETTI A.) (L.)	»	420, 574
GATTI E. - A Stable High Speed Multichannel Pulse Analyzer	»	153
GATTI E., E. GERMAGNOLI e G. PERONA - Misure di sezione d'urto totali per neutroni lenti	»	262
GATTO R. - Sulla indipendenza dalla carica nella produzione di particelle Λ	»	445
GEISS J. (vedi BEGEMANN F.)	»	663
GERMAGNOLI E. (vedi GATTI E.)	»	262
GIERULA J. (vedi CIOK P.)	»	436
GIGLI A. (vedi ARGAN P. E.)	»	530
GOLDSACK S. J. (vedi DILWORTH C. C.)	»	113
GOLDSACK S. J. (vedi DILWORTH C. C.) (L.)	»	424
GOLDSACK S. J. and D. HIRSCHBERG - A Punched Card System of Recording of Events in Nuclear Emulsion Work (L.)	»	100
GREGORY B., A. LAGARRIGUE, L. LEPRINCE-RINGUET, F. MULLER et Ch. PEYROU - Étude des mésons K chargés, au moyen de deux chambres de Wilson superposées	»	292
GROSJEAN C. C. - Solution of a Non-Isotropic Random Flight Problem in the Case of a Non-Isotropic Point Source	»	11
GROSJEAN C. C. and V. J. VAN HUYSE - On the Properties of a Spectrometer for Linear Electron Accelerator	»	639
GROSSETTI E. - Determinazione del coefficiente di assorbimento degli ultrasuoni dei liquidi mediante il metodo termico	»	250
HABER-SCHAIM U. and G. YEKUTIELI - Energetic Nuclear Collisions in the Upper Atmosphere. (I). The Nucleon Pion Cascade	»	172
HABER-SCHAIM U. and G. YEKUTIELI - Energetic Nuclear Collisions in the Upper Atmosphere. (II). The Muon Component	»	683
HAZEN W. E. - Air-Shower Transition in Water; Interpretation of Under-Water Decoherence Curves	»	393
HIRSCHBERG L. (vedi DILWORTH C. C.)	»	113
HIRSCHBERG D. (vedi GOLDSACK S. J.)	»	100
HOANG T. F. (vedi DILWORTH C. C.) (L.)	»	424
HOUTERMANS F. G. (vedi BEGEMANN F.)	»	663
KIND A. e G. PATERGNANI - A proposito di un modello statistico a particelle indipendenti del nucleo pesante (L.)	»	106
LAGARRIGUE A. (vedi GREGORY B.)	»	292
LAZZARINI E. (vedi BERTOLINI G.)	»	539
LEHMANN H. - Über Eigenschaften von Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonstanten quantisierter Felder	»	342
LEPRINCE-RINGUET L. (vedi Amaldi E.) (P. D.)	»	213
LEPRINCE-RINGUET L. (vedi GREGORY B.)	»	292
LÉVY M. M. and R. E. MARSHAK - The S-Wave in Pion-Nucleon Scattering	»	366
LEVI SETTI R. (vedi BONETTI A.) (L.)	»	210
LEVI SETTI R. (vedi BONETTI A.) (L.)	»	330

LOVATI A., A. MURA and C. SUCCI — On the Production of Electronic Component by Fast μ -Mesons (L.)	pag. 92
LOVATI A. e C. SUCCI — Una camera a diffusione con campo magnetico per fisica nucleare	» 163
LOVERA G. (vedi DEBENEDETTI A.) (L.)	420, 574
MCCUSKER C. B. A. and F. C. ROESLER — An Analysis of Cosmic Ray Jets (L.)	» 98
MALVANO R. (vedi DE MICHELIS F.)	» 49
MANFREDINI A. (vedi AMALDI E.) (L.)	» 207
MARSHAK R. E. and A. M. L. MESSIAH — Pion Production by Polarized Beams of Nucleons	» 337
MARSHAK R. E. (vedi LÉVY M. M.)	» 366
MARTELLI G. (vedi BERTANZA L.)	» 217
MARTELLI G. (vedi BERTANZA L.) (L.)	» 692
MERLIN M. (vedi SOMEDA G.)	» 73
MESSIAH A. M. L. (vedi MARSHAK R. E.)	» 337
MILONE C. — Sulla dipendenza del rapporto fotoni/elettroni negli sciami di raggi cosmici dalla densità media degli sciami selezionati	» 241
MINARDI E. — Quantizzazione delle masse e formalismo non locale (L.) . .	» 694
MINGUZZI A., G. PUPPI and A. RANZI — Interaction of π^+ Mesons in Photographic Plates (II) (L.)	» 697
MORA S. (vedi CALZOLARI M. L.) (L.)	» 565
MORPURGO G. — Further remarks on Tamm-Dancoff Method (L.)	» 103
MORPURGO G. (vedi CINI M.) (L.)	» 316
MULLER F. (vedi GREGORY B.)	» 292
MURA A. (vedi LOVATI A.)	» 92
NUOVO M. (vedi BORDONI P. G.)	» 127
PANETTI M. (vedi BONETTI A.) (L.)	» 210
PANCINI E. (vedi ALBERIGI-QUARANTA A.)	» 607
PANETTI M. (vedi BONETTI A.) (L.)	» 330
PAOLETTI A. (vedi CARERI G.)	» 399
PARTHASARATHY S. and N. N. BAKHSHI — A Further Elucidation of the Relationship between Velocity in Liquids and Molecular Weight (L.) . .	» 310
PATERGNANI G. (vedi KIND A.) (L.)	» 106
PELI L. (vedi BRINI D.)	» 651
PELI L. (vedi BRINI D.)	» 655
PERONA G. (vedi GATTI E.)	» 262
PETERS B. (vedi AMALDI E.) (P. D.)	» 213
PETRALIA S. — Assorbimento di ultrasuoni in miscele di elio-argon (L.) . .	» 570
PEYROU CH. (vedi GREGORY B.)	» 292
PLAINEVAUX J. E. — Mouvement parasite d'une suspension élastique symétrique à compensation et asservissement	» 626
POIANI G. (vedi CERNIGOI C.)	» 41
PUPPI G. (vedi MINGUZZI A.) (L.)	» 697
POWELL C. F. (vedi AMALDI E.) (P. D.)	» 213
QUERZOLI R. (vedi CORTELLESA G.) (L.)	» 321
RANZI A. (vedi MINGUZZI A.) (L.)	» 697
REGGE T. — Tensor Force and Intermediate Coupling in P-Shell Nuclei . .	» 285
RIMONDI O. (vedi BRINI D.)	» 651
RIMONDI O. (vedi BRINI D.)	» 655
ROCHESTER C. D. (vedi AMALDI E.) (P. D.)	» 213

ROESLER F. C. (vedi McCUSKER C. B. A.) (L.)	pag. 98
ROSSI A. (vedi COLLI L.)	» 255
ROSSI B. (vedi AMALDI E.) (P. D.)	» 213
SALVETTI F. L. (vedi CARERI G.)	» 399
SALVINI G. - Proposal of a Synchrotron with a Double Vacuum Chamber (L.)	» 555
SCARSI L. (vedi BONETTI A.) (L.)	» 210
SCARSI L. (vedi BONETTI A.) (L.)	» 330
SCARSI L. (vedi DILWORTH C. C.) (L.)	» 424
SCHAFROTH M. R. - A Sound Wave Description of Fermion Assemblies	» 53
SCHÖNBERG M. - A Non-Linear Generalization of the Schrödinger and Dirac Equation	» 674
SCIUTI S. (vedi ARGAN P. E.)	» 530
SIMONETTA M. e A. VACIAGO - Sulla struttura elettronica del Nitrobenzolo	» 596
SOMEDA G. e M. MERLIN - Un elettromagnete di grande potenza per lastre nucleari	» 73
SUCCI C. (vedi LOVATI A.) (L.)	» 92
SUCCI C. (vedi LOVATI A.)	» 163
SYMANZIK K. - Zur renormierten einzeitigen Bethe-Salpeter-Gleichung (L.)	» 88
TALLONE L. (vedi DEBENEDETTI A.) (L.)	420, 574
THOMPSON B. W. (vedi AMALDI E.) (P. D.)	» 213
TOMASINI G. (vedi BONETTI A.) (L.)	» 210
TOMASINI G. (vedi BONETTI A.) (L.)	» 330
TOUSCHEK B. (vedi CINI M.) (L.)	» 316
TOUSCHEK B. F. (vedi FABRI E.) (L.)	» 96
VACIAGO A. (vedi SIMONETTA M.)	» 596
VAN HUYSE V. J. (vedi GROSJEAN C. C.)	» 639
VERONESI P. (vedi BRINI D.)	» 651
VERONESI P. (vedi BRINI D.)	» 655
VIGONE M. (vedi DEBENEDETTI A.) (L.)	420, 574
VITALE B. (vedi BELLIBONI G.)	» 372
WATAGHIN G. (vedi COLOMBINO P.) (L.)	» 572
WHITE G. R. (vedi FRY W. F.)	» 551
WILLIAMSON E. M. (vedi FLINT H. T.)	» 188
WILLIAMSON E. M. (vedi FLINT H. T.) (L.)	» 568
YEKUTIELI G. (vedi HABER-SCHAIM U.)	» 172
YEKUTIELI G. (vedi HABER-SCHAIM U.)	» 683
ZACUTTI A. (vedi BERTANZA L.) (L.)	» 692
ZAPPA L. (vedi BERTOLINI G.)	» 539
ZIMMERMANN W. - Zum Renormierungsprogramm der Feldphysik (L.)	» 416
ZIMMERMANN W. - Einzeitige Verfahren der Feldphysik (L.)	» 559
ZIMMERMANN W. - Yang-Feldmanformalismus und einzeitige Wellenfunktionen	» 577

INDICE ANALITICO PER MATERIA

APPARATI E STRUMENTI

Amplifier with Low Dissipation and Short Rise-Time for C.R.T., <i>D. Brini, L. Peli, O. Rimondi and P. Veronesi</i>	pag. 651
Camera a diffusione con campo magnetico per fisica nucleare, <i>A. Lovati e C. Succi</i>	» 163
Compteurs à cathode externe remplis de méthylal pur (caracteristiques de fonctionnement de), <i>D. Blanc</i>	» 231
Discriminatore differenziale oscillografico e sua applicazione nei circuiti a coincidenza, <i>F. De Michelis e R. Malvano</i>	» 49
Elettromagnete di grande potenza per lastre nucleari, <i>G. Sameda e M. Merlin</i>	» 73
Liquid Scintillation Counter (Study of a), <i>D. Brini, L. Peli, O. Rimondi and P. Veronesi</i>	» 655
Sistema ottico per la trasmissione di informazioni, <i>G. Cortellessa e R. Querzoli</i>	» 321
Spectrometer for Linear Electron Accelerator (on the Properties of), <i>C. C. Grosjean and V. J. Van Huyse</i>	» 639
Stable High Speed Multichannel Pulse Analyzer, <i>E. Gatti</i>	» 153
Study of RCA 5819 and EMI 6260 Photomultipliers as Individual Photon Counters, <i>L. Colli, U. Facchini and A. Rossi</i>	» 255
Synchrotron with a Double Vacuum Chamber (Proposal of a), <i>G. Salvini</i>	» 555

CHIMICA FISICA

Sulla struttura elettronica del Nitrobenzolo, <i>M. Simonetta e A. Vaciago</i>	» 596
--	-------

COSMICA (RADIAZIONE)

Analysis of Cosmic Ray Jets, <i>C. B. A. McCusker and F. C. Roesler</i>	» 98
Analyses of Cosmic Ray Jets (Remarks on Recent), <i>C. C. Dilworth, S. J. Goldsack, T. F. Hoang and L. Scarsi</i>	» 424
Air-Showers Transition in Water: Interpretation of Under-Water De-coherence Curves, <i>W. E. Hazen</i>	» 393
Bilancio energetico della radiazione cosmica presso l'equatore, <i>V. Benzi</i>	» 686
Dipendenza del rapporto fotoni/elettroni negli sciami di raggi cosmici dalla densità media degli sciami selezionati, <i>C. Milone</i>	» 241
Distribuzioni e correlazioni angolari e distribuzioni energetiche dei rami di stelle di disintegrazione nucleare prodotte dalla radiazione cosmica, <i>G. Belliboni e B. Vitale</i>	» 372
Energetic Nuclear Collisions in the Upper Atmosphere. (I): The Nucleon Pion Cascade, <i>U. Haber-Schaim and G. Yekutieli</i>	» 172
Energetic Nuclear Collisions in the Upper Atmosphere. (II): The Muon Component, <i>U. Haber-Schaim and G. Yekutieli</i>	» 683
Fluctuations in the Transition Curves of Cosmic Ray Electrons, <i>L. Bertanza and G. Martelli</i>	» 217

Penetrating Showers in Hydrogen and Carbon (On the Production of), <i>P. Colombino, S. Ferroni and G. Wataghin</i>	pag. 572
Production of Electronic Component by fast μ -Mesons, (On the), <i>A. Lovati, A. Mura and C. Succi</i>	» 92
Spettro della componente fotonica al livello del mare (Sullo), <i>C. Cernigoi, e G. Poiani</i>	» 41

CRISTALLI SOLIDI E LIQUIDI

Dissipazione delle onde elastiche nel piombo ad alta temperatura, <i>P. G. Bordoni e M. Nuovo</i>	» 127
Fotofluorescenza e scintillazioni, <i>M. Ageo</i>	» 318
Interaction between Equilibrium Defects in the Alkali Halides: The « Ground State » binding Energies between Divalent Impurities and Vacancies, <i>F. Bassani and F. G. Fumi</i>	» 274
Onda di pressione nei liquidi (su di una), <i>A. Carrelli e G. Branca</i> . .	» 590
Overheated Liquids (Some Measurements on), <i>L. Bertanza, G. Martelli and A. Zacutti</i>	» 692
Relationship Between Velocity in Liquids and Molecular Weight (A Further Elucidation of the), <i>S. Parthasarathy and N. N. Bakhshi</i> . .	» 310
Self-Diffusion in Liquid Indium, <i>G. Careri, A. Paoletti and F. L. Salvetti</i> . .	» 399
Study of the $F \rightarrow Z_1$ Conversion in KCl Chrystals with Divalent Impurities, <i>P. Camagni and G. Chiarotti</i>	» 1
Viscosità di volume (I), <i>A. Carrelli e F. Cennamo</i>	» 429

EFFETTO ČERENKOV

Esperienze sull'effetto Čerenkov nell'aria, <i>A. Ascoli Balzanelli e R. Ascoli</i>	562
---	-----

FISICA TECNICA

Mouvement parasite d'une suspension élastique symétrique a compensation et asservissement, <i>J. E. Plainevaux</i>	» 626
--	-------

FISICA TERRESTRE

Isotopenzusammensetzung und Radioaktivität von rezentem Vesuvblei, <i>F. Begemann, J. Geiss, F. G. Houtermans und W. Buser</i>	» 663
--	-------

MESONI (MESONI PESANTI)

Analysis of Two-Positive τ -Mesons, <i>A. Debenedetti, C. M. Garelli, G. Lovera, L. Tallone and M. Vigone</i>	420, 574
Anomalous Large Angle Scattering of μ -Mesons, <i>J. P. Davidson</i> . . .	» 205
Cattura dei mesoni μ^- da parte dei nuclei leggeri, <i>A. Alberigi-Quaranta e E. Pancini</i>	» 607
Étude des mésons K chargés au moyen de deux chambres de Wilson superposées, <i>B. Gregory, A. Lagarrigue, L. Leprince-Ringuet, F. Muller et Ch. Peyrou</i>	» 292
Indipendenza dalla carica nella produzione di particelle Λ , <i>R. Gatto</i> . .	» 445
Interaction of μ -Mesons with Matter at High Energies, <i>P. E. Argan, A. Gigli and S. Sciuti</i>	» 530

Interaction of π^+ Mesons in Photographic Plates (II), <i>A. Minguzzi, G. Puppi and A. Ranzi</i>	pag. 697
Meson-Active Triton from a Nuclear Disintegration (On the Possible Ejection of α), <i>A. Bonetti, R. Levi Setti, M. Panetti, L. Scarsi and G. Tomasini</i>	» 210
Meson-Active Triton (Remarks on the Decay of α), <i>A. Bonetti, R. Levi Setti, M. Panetti, L. Scarsi and G. Tomasini</i>	» 330
Nature of the μ -Meson (On the), <i>N. Dallaporta</i>	» 82
Non-Mesonic Decay of a Bound V Particle, <i>W. F. Fry and G. R. White</i>	» 551
$K \rightarrow \pi$ Meson Decay (On a possible negative), <i>E. Amaldi, G. Baroni, C. Castagnoli, G. Cortini, C. Franzinetti and A. Manfredini</i>	» 207
Pion-Nucleon Scattering (The S-Wave in), <i>M. M. Lévy and R. E. Marshak</i>	» 366
Pion Production by Polarized Beams of Nucleons, <i>R. E. Marshak and A. M. L. Messiah</i>	» 337
Produzione di mesoni π in Carbonio e Alluminio, <i>M. L. Calzolari, G. Dascola, A. Gainotti e S. Mora</i>	» 565
Study of τ -Meson Decay, <i>E. Fabri</i>	» 479
Vita media del mesone τ , <i>E. Fabri e B. F. Touschek</i>	» 96

NUCLEI (FISICA NUCLEARE - LASTRE)

Delayed Decay of Heavy Fragments Ejected from Cosmic Ray Stars, <i>P. Ciok, M. Danysz and J. Gierula</i>	» 436
Determination of the Mass of Slow Particles by the Constant Sagitta Method, <i>C. C. Dilworth, S. J. Goldsack and L. Hirschberg</i>	» 113
Distribuzioni e correlazioni angolari e distribuzioni energetiche dei rami di stelle di disintegrazione nucleare prodotte dalla radiazione cosmica, <i>G. Belliboni e B. Vitale</i>	» 372
High Polarization of Nuclei in Paramagnetic Substances, <i>P. Brovotto and G. Cini</i>	» 618
L-Capture to K-Capture Ratio in Cd^{109} , <i>G. Bertolini, A. Bisi, E. Lazzarini and L. Zappa</i>	» 539
Meson-Active Triton from a Nuclear Disintegration (On the Possible Ejection of α), <i>A. Bonetti, R. Levi Setti, M. Panetti, L. Scarsi and G. Tomasini</i>	» 210
Meson-Active Triton (Remarks on the Decay of α), <i>A. Bonetti, R. Levi Setti, M. Panetti, L. Scarsi and G. Tomasini</i>	» 330
Modello statistico a particelle indipendenti del nucleo pesante (a proposito di un), <i>A. Kind e G. Patergnani</i>	» 106
Polarization of High Energy Protons Scattered by Nuclei, <i>E. Fermi</i>	» 407
Punched Card System of Recording of Events in Nuclear Emulsion Work, <i>S. J. Goldsack and D. Hirschberg</i>	» 100
Sezione d'urto per i processi (d, p) e (p, d), <i>E. Clementel</i>	» 412
Sezioni d'urto totali per neutroni lenti (Misure di), <i>E. Gatti, E. Germa- gnoli e G. Perona</i>	» 262
Symmetry Correlations in Nuclear Reactions, <i>A. Gamba</i>	» 323
Tensor Force and Intermediate Coupling in P-Shell Nuclei, <i>T. Regge</i>	» 285
Total Ionization of α -Particles of Po in Mixtures of Gases, <i>G. Bertolini, M. Bettoni and A. Bisi</i>	» 458

TEORIE GENERALI

Bethe-Salpeter-Gleichung (Zur renormierten einzeitigen), <i>K. Symanzik</i>	pag. 88
Construction of Potentials from Phase Shift and Binding Energies of Relativistic Equations, <i>E. Corinaldesi</i>	» 468
Corben's Formulation of the Dirac Equation (On), <i>O. Bergmann and N. Baker</i>	» 203
Eigenschaften von Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonstanten quantisierter Felder, <i>H. Lehmann</i>	» 342
Einzeitige Verfahren der Feldphysik, <i>W. Zimmermann</i>	» 559
Equazione alle differenze finite per l'elettrone classico (Su una), <i>F. Duimio</i>	» 326
Indipendenza dalla carica nella produzione di particelle Λ , <i>R. Gatto</i>	» 445
Metodo per risolvere il problema del potenziale coulombiano modificato, <i>D. Baroncini</i>	» 688
Non-Linear Generalization of the Schrödinger and Dirac Equation, <i>M. Schönberg</i>	» 674
Non-Perturbation Treatment of Scattering and the «Wentzel-Example», <i>M. Cini, G. Morpurgo and B. Touschek</i>	» 316
Non Perturbation Treatment of Scattering in Quantum Field Theory, <i>M. Cini and S. Fubini</i>	» 142
Propagation and Wavefunctions in Quantum Theory of Fields, <i>E. Freese</i>	» 312
Quantizzazione delle masse e formalismo non locale, <i>E. Minardi</i>	» 694
Quantum Field Theory. (II): Non-Perturbative Equations and Methods, <i>E. R. Caianiello</i>	» 492
Relation Between Fundamental Tensor and Affinity in Unified Field Theory (On the), <i>B. Bertotti</i>	» 358
Relativistic Scattering of Electrons and the Born Approximation, <i>E. Corinaldesi</i>	» 200
Renormierungsprogramm der Feldphysik, <i>W. Zimmermann</i>	» 416
Solution of a Non-Isotropic Random Flight Problem in the Case of a Non-Isotropic Point Source, <i>C. C. Grosjean</i>	» 11
Sound Wave Description of Fermion Assemblies, <i>M. R. Schafroth</i>	» 53
Spiegazione classica del momento magnetico anomalo dell'elettrone, <i>P. Caldirola</i>	» 108
Symbols for Fundamental Particles (P. D.), <i>E. Amaldi, C. D. Anderson, P. M. S. Blackett, W. B. Fretter, L. Leprince-Ringuet, E. Peters, C. F. Powell, C. D. Rochester, B. Rossi and B. W. Thompson</i>	» 213
Symmetry Correlations in Nuclear Reactions, <i>A. Gamba</i>	» 323
Tamm-Dancoff Method (Further Remarks on), <i>G. Morpurgo</i>	» 103
Theory of the Electron, <i>H. T. Flint and E. M. Williamson</i>	» 188
Theory of the Electron, <i>H. T. Flint and E. M. Williamson</i>	» 568
Yang-Feldformalismus und einzeitige Wellenfunktionen, <i>W. Zimmermann</i>	» 577

ULTRASUONI

Assorbimento di ultrasuoni in miscele di elio-argon, <i>S. Petralia</i>	» 570
Determinazione del coefficiente di assorbimento degli ultrasuoni dei liquidi mediante il metodo termico, <i>E. Grossetti</i>	» 250

INDICE DELLE RECENSIONI

E. BLEULER and G. J. GOLDSMITH - <i>Experimental Nucleonics</i>	pag. 111
H. EYRING, J. WALTER and G. E. KIMBALL - <i>Chimica quantistica</i>	» 215
VALERIO TONINI - <i>Epistemologia della Fisica Moderna</i>	» 215
E. SEGRÈ, Editor - <i>Experimental Nuclear Physics</i>	» 332
K. PRZIBRAM - <i>Verfärbung und Lumineszenz</i>	» 334
<i>Convegno di Scienze fisiche, matematiche e naturali</i> (14-19 Settembre 1952).	
<i>Problemi della fisica solare</i>	» 335
P. M. WOODWARD B. A. - <i>Probability and information theory with application to radar</i>	» 575
<i>Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique.</i>	
XXXIX. <i>Électrolyse</i>	» 575

Fine del Volume XI, Serie IX, 1954

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA
